Российская академия наук
Российская академия образования
Издательство «Просвещение»

Академический школьный учебник

АЛГЕБРА

$(5x^3-3x^2-7)+(4+3x^2-5x^3)$

7

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Российская академия наук
Российская академия образования
Издательство «Просвещение»

Академический школьный учебник

АЛГЕБРА

7 класс

Учебник для общеобразовательных учреждений

Под редакцией Г. В. Дорофеева

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

6-е издание

Москва
«Просвещение»
2010

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

Серия «Академический школьный учебник» основана в 2005 году

Проект «Российская академия наук, Российская академия образования, издательство «Просвещение» — российской школе»

Руководители проекта: вице-президент РАН акад. *В. В. Козлов*, президент РАО акад. *Н. Д. Никандров*, генеральный директор издательства «Просвещение» чл.-корр. РАО *А. М. Кондаков*

Научные редакторы серии: акад.-секретарь РАО, д-р пед. наук *А. А. Кузнецов*, акад. РАО, д-р пед. наук *М. В. Рыжаков*, д-р экон. наук *С.В. Сидоренко*

Авторы: *Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева*

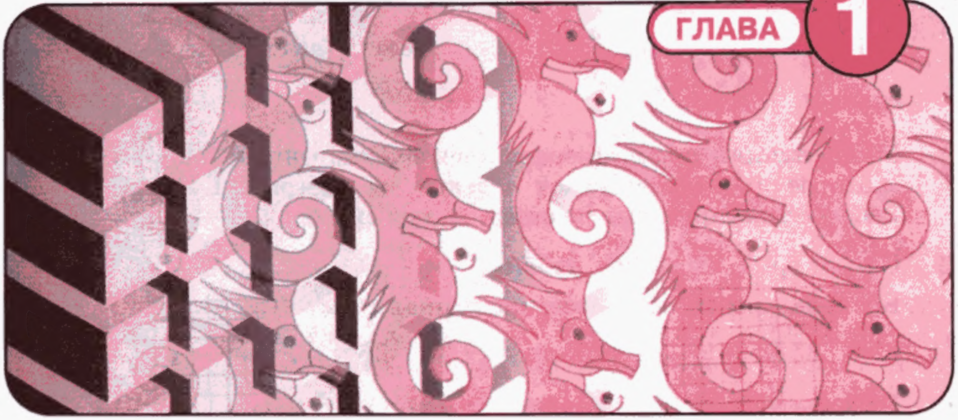
На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 2-10106-5215/1424 от 25.10.06) и Российской академии образования (№ 01-78/5/7д от 12.07.06)

Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений/
А45 [Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др.]; под ред. Г. В. Дорофеева; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования, изд-во «Просвещение». — 6-е изд. — М.: Просвещение, 2010. — 256 с. : ил. — (Академический школьный учебник). — ISBN 978-5-09-022871-8.

Учебник соответствует федеральным компонентам Государственного стандарта общего образования. Учебно-методический комплект по алгебре для 7 класса под редакцией Г. В. Дорофеева включает учебник, рабочую тетрадь, тематические тесты, дидактические материалы, книгу для учителя и контрольные работы для 7—9 классов. В оформлении заставок учебника использованы мотивы рисунков М. Эшера.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-09-022871-8



ГЛАВА 1

Дроби и проценты

1.1 Сравнение дробей

Вы знаете, что есть два способа записи дробных чисел — в виде обыкновенных и в виде десятичных дробей. Поэтому нужно уметь сравнивать числа, записанные в любой из этих форм.

Сравнивая две обыкновенные дроби, вы пользовались разными приемами. Теперь мы познакомимся еще с одним, который можно применить к любым двум обыкновенным дробям. Сначала рассмотрим числовой пример.

Возьмем дроби $\frac{5}{7}$ и $\frac{9}{13}$ и выясним, какая из них больше. Для этого приведем их к общему знаменателю:

$$\frac{5}{7}=\frac{5\cdot 13}{7\cdot 13},\quad \frac{9}{13}=\frac{9\cdot 7}{13\cdot 7}.$$

Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой числитель больше. Таким образом, задача свелась к сравнению произведений $5\cdot 13$ и $9\cdot 7$. Так как $5\cdot 13=65$, а $9\cdot 7=63$, то $5\cdot 13>9\cdot 7$. Значит, $\frac{5}{7}>\frac{9}{13}$.

Решим теперь эту же задачу в общем виде, прибегнув к буквенной записи. Пусть даны дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, где a, b, c, d — натуральные числа. Приведем их к общему знаменателю: $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$, $\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$.

Отсюда ясно, что

если $ad > bc$, то $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; если $ad < bc$, то $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$;
если $ad = bc$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Мы получили *правило* сравнения обыкновенных дробей, которое иногда называют *перекрестным* (рис. 1.1).

Рассмотрим примеры сравнения дробей.

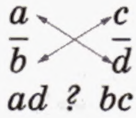


Рис. 1.1

■ Пример 1. Сравним дроби $\frac{11}{26}$ и $\frac{17}{32}$.

Воспользуемся перекрестным правилом. Так как $11 \cdot 32 = 352$, $26 \cdot 17 = 442$, то $11 \cdot 32 < 26 \cdot 17$. Значит, $\frac{11}{26} < \frac{17}{32}$.

■ Пример 2. Сравним дроби $\frac{5}{8}$ и 0,65.

Решить эту задачу можно, например, так: записать число 0,65 в виде обыкновенной дроби и затем воспользоваться перекрестным правилом.

Но есть и другая возможность: дробь $\frac{5}{8}$ обращается в десятичную (объясните почему), поэтому задачу можно свести к сравнению двух десятичных дробей. А со сравнением десятичных дробей дело обстоит проще.

Так как $\frac{5}{8} = 0{,}625$, а $0{,}625 < 0{,}65$, то $\frac{5}{8} < 0{,}65$.

■ Пример 3. Даны числа $\frac{7}{12}$, $\frac{8}{15}$ и 0,54. Расположим их в порядке возрастания.

Здесь также возможны разные способы рассуждений. Конечно, удобнее было бы иметь дело с десятичными дробями. Однако дроби $\frac{7}{12}$ и $\frac{8}{15}$ в десятичные не обращаются. Можно также представить дробь 0,54 в виде обыкновенной и затем с помощью перекрестного правила сравнить обыкновенные дроби попарно. Но этот путь весьма трудоемкий.

И все-таки можно воспользоваться десятичными дробями. В самом деле, заменим дроби $\frac{7}{12}$ и $\frac{8}{15}$ их приближенными десятичными значениями. Для этого разделим числитель каждой из них на знаменатель, причем техническую работу, т. е. сам процесс деления, поручим калькулятору.

При делении 7 на 12 на экране калькулятора высветится длинное число 0,5833333. Так как для наших целей достаточно знать цифру сотых, то будем считать, что $\frac{7}{12} \approx 0{,}58$.

Точно так же найдем, что $\frac{8}{15} \approx 0{,}53$. Теперь нужно упорядочить десятичные дроби 0,58; 0,53 и 0,54. Так как $0{,}53 < 0{,}54 < 0{,}58$, то

$$\frac{8}{15} < 0{,}54 < \frac{7}{12}.$$

В заключение подчеркнем, что в наших рассуждениях речь шла только о положительных дробях. Если же среди чисел есть отрицательные, то следует пользоваться общими правилами сравнения положительных и отрицательных чисел. Например, $0{,}01 > -0{,}948$, так как любое положительное число больше любого отрицательного числа; $-\frac{2}{3} > -\frac{3}{4}$, так как $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.

А

1. Верно ли неравенство:

а) $\frac{5}{9} < \frac{7}{11}$; б) $\frac{4}{21} < \frac{3}{17}$; в) $\frac{7}{12} < \frac{9}{16}$; г) $\frac{5}{8} < \frac{8}{13}$?

2. Сравните числа, используя прием сравнения с «промежуточным» числом:

а) $\frac{11}{18}$ и $\frac{10}{23}$; б) $\frac{5}{28}$ и $\frac{11}{40}$; в) $\frac{49}{53}$ и $\frac{41}{40}$; г) $\frac{29}{15}$ и $\frac{25}{12}$.

Образец. Сравним числа $\frac{25}{62}$ и $\frac{49}{80}$.

Так как $\frac{25}{62} < \frac{1}{2}$, а $\frac{49}{80} > \frac{1}{2}$, то $\frac{25}{62} < \frac{49}{80}$.

3. Сравните числа, используя любой удобный вам способ:

а) $\frac{3}{7}$ и $\frac{11}{27}$; б) $\frac{31}{32}$ и $\frac{21}{22}$; в) $\frac{45}{98}$ и $\frac{23}{38}$; г) $\frac{22}{21}$ и $\frac{21}{20}$.

4. а) Петя и Коля, сравнивая длины своих шагов, заметили, что 17 шагов Пети составили 8 м, а 20 шагов Коли составили 11 м. Чей шаг короче?

б) Петя распечатал на своем принтере 14 страниц за 3 мин, а Коля на своем 24 страницы за 5 мин. Чей принтер работает быстрее?

5. Какие из следующих дробей можно представить в виде десятичных:

$\frac{3}{40}$; $\frac{7}{15}$; $\frac{16}{24}$; $\frac{9}{45}$; $\frac{14}{50}$; $\frac{34}{16}$?

6. Сравните числа:

а) 0,8 и $\frac{3}{4}$; б) $\frac{4}{5}$ и 0,9; в) 0,25 и $\frac{4}{15}$; г) $\frac{7}{11}$ и 0,6.

7. Даны дроби: $\frac{12}{25}$; $\frac{21}{40}$; 0,52; 0,485.

Какая из данных дробей наименьшая? Какая наибольшая?

8. Сравните числа (если необходимо, используйте калькулятор):

а) 0,52 и $\frac{17}{32}$; б) $\frac{39}{125}$ и 0,3125; в) $\frac{130}{311}$ и $\frac{88}{217}$; г) $\frac{11}{170}$ и $\frac{15}{231}$.

9. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\frac{3}{4}$; $\frac{37}{500}$; 0,7; б) 0,13; $\frac{29}{200}$; 0,125.

10. Расположите в порядке убывания числа:

а) $\frac{1}{3}$; 0,3; 0,33; $\frac{4}{11}$; б) $\frac{2}{3}$; 0,6; 0,66; $\frac{5}{8}$.

11. Сравните числа:

а) $-\frac{5}{19}$ и $-\frac{2}{9}$; б) $-\frac{5}{12}$ и $-\frac{11}{19}$; в) $-0{,}6$ и $-\frac{5}{6}$; г) $-\frac{1}{4}$ и $-0{,}2$.

12. По итогам работы за неделю отдел контроля телевизионного завода составил таблицу проверки качества телевизоров, выпущенных с конвейера:

День недели	Выпущено	Признано годными
Понедельник	235	228
Вторник	245	239
Среда	255	252
Четверг	256	250
Пятница	240	233
Суббота	182	175

В какой день недели завод работал лучше всего, в какой — хуже всего с точки зрения качества выпущенных телевизоров? (Воспользуйтесь калькулятором.)

13. 1) Чему равно значение дроби $\frac{1}{a}$, если $a = 15$; 8; $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$; -8; $-\frac{3}{5}$?

2) Из данных значений a назовите какое-нибудь одно, при котором:

$0 < \frac{1}{a} < 1$; $\frac{1}{a} > 1$; $-1 < \frac{1}{a} < 0$; $\frac{1}{a} < -1$.

14. (*Задание с выбором ответа.*) Среди данных чисел выберите такое, при котором выполняется неравенство $\frac{4}{5} < \frac{7}{a} < 1$.

А. 6. **Б.** 8. **В.** 10. **Г.** 14.

Б

15. Составьте все дроби (не равные 1) с числителями и знаменателями 11, 12, 13 и расположите их в порядке возрастания.

16. Сколько можно составить различных дробей, отличных от 1, у которых числитель и знаменатель являются простыми числами от 11 до 37? Укажите наименьшее и наибольшее из этих чисел. Определите, сколько из составленных дробей меньше $\frac{1}{2}$.

17. (*Задание с выбором ответа.*) Расположите в порядке возрастания числа: $k = \frac{101}{100}$, $m = \frac{109}{110}$, $n = \frac{119}{120}$.

А. $k < m < n$. **Б.** $m < k < n$. **В.** $m < n < k$. **Г.** $n < m < k$.

18. При каких натуральных значениях x верно неравенство:

а) $\frac{100}{x} > 20$; б) $\frac{30}{x} < 10$; в) $1 < \frac{50}{x} < 10$; г) $\frac{20}{x} > \frac{1}{2}$?

19. Известно, что верны утверждения:

1) Если знаменатель несократимой дроби не имеет простых делителей, отличных от 2 и 5, то эту дробь можно записать в виде десятичной.

2) Если несократимую дробь можно записать в виде десятичной, то ее знаменатель в качестве простых делителей имеет только 2 и 5.

3) Если знаменатель несократимой дроби имеет простые делители, отличные от 2 и 5, то эту дробь нельзя записать в виде десятичной.

4) Если несократимую дробь нельзя представить в виде десятичной, то ее знаменатель содержит простые делители, отличные от 2 и 5.

Какие из утверждений останутся верными, если убрать слово «несократимая»?

1.2 Вычисления с рациональными числами

Если среди чисел, с которыми требуется выполнить арифметические действия, есть и обыкновенные, и десятичные дроби, то их надо привести к какой-нибудь одной из этих форм. При этом всегда полезно подумать, с какими дробями удобнее иметь дело. Правда, в некоторых случаях выбирать не приходится, поскольку обыкновенную дробь преобразовать в десятичную можно не всегда.

■ **Пример 1.** Найдем сумму $0{,}3 + \frac{1}{6}$.

Дробь $\frac{1}{6}$ нельзя обратить в десятичную, поэтому следует записать в виде обыкновенной дроби число 0,3:

$$0{,}3 + \frac{1}{6} = \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{9+5}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}.$$

Если выражение содержит деление на десятичную дробь, то лучше перейти к обыкновенным дробям, так как деление уголком может оказаться бесконечным.

■ **Пример 2.** Найдем значение выражения $0{,}32 \cdot 2{,}1 : 1{,}44$.

Заменим в данном выражении знак деления дробной чертой и преобразуем полученную дробь с помощью основного свойства дроби так, чтобы в числителе и в знаменателе оказались целые числа:

$$0{,}32 \cdot 2{,}1 : 1{,}44 = \frac{0{,}32 \cdot 2{,}1}{1{,}44} = \frac{0{,}32 \cdot 2{,}1 \cdot 1000}{1{,}44 \cdot 1000} = \frac{32 \cdot 21}{144 \cdot 10} = \frac{7}{15}.$$

■ **Пример 3.** Заменим в выражении $\frac{ab}{a-b}$ буквы числами, подставив $a = 3$, $b = -7$, и выполним вычисления; при этом воспользуемся правилами действий с положительными и отрицательными числами:

$$\frac{ab}{a-b} = \frac{3 \cdot (-7)}{3-(-7)} = \frac{-21}{10} = -2{,}1.$$

Говорят, что *значение выражения* $\frac{ab}{a-b}$ при $a = 3$, $b = -7$ равно $-2{,}1$.

Обратите внимание на то, как была выполнена числовая подстановка:

все содержащиеся в выражении буквы заменили числами;

одинаковые буквы заменили одним и тем же числом;

при замене буквы отрицательным числом это число заключили в скобки;

в получившемся числовом выражении в числителе был поставлен знак умножения (между буквами, как вы знаете, знак умножения не ставится).

А

20. Выполните действия:

а) $3{,}72 + \frac{2}{5}$; в) $0{,}6 - \frac{4}{9}$; д) $-2{,}9 + \left(-\frac{1}{4}\right)$; ж) $-\frac{3}{7} + 0{,}5$;

б) $\frac{1}{3} + 0{,}3$; г) $\frac{3}{5} - 0{,}76$; е) $-\frac{1}{6} - 0{,}5$; з) $\frac{3}{20} - 0{,}95$.

21. Вычислите:

а) $-7 \cdot 1{,}25 + 10$; $-7 \cdot (1{,}25 + 10)$;
б) $-5 \cdot (-3{,}6) - 3{,}8$; $-5 \cdot (-3{,}6 - 3{,}8)$;
в) $1{,}8 - 4 \cdot (-2{,}15)$; $(1{,}8 - 4) \cdot (-2{,}15)$.

22. (*Задание с выбором ответа.*) Значение какого из выражений является наименьшим?

А. $\frac{1}{23} : \frac{1}{15}$. **Б.** $\frac{1}{23} \cdot \frac{1}{15}$. **В.** $\frac{1}{23} + \frac{1}{15}$. **Г.** $\frac{1}{23} - \frac{1}{15}$.

23. Найдите значение выражения:

а) $3{,}75 \cdot 0{,}18 : 0{,}6$; в) $0{,}06 \cdot 1{,}8 : 0{,}044$;
б) $2{,}4 : 1{,}08 \cdot 0{,}15$; г) $0{,}045 : 0{,}5 \cdot 0{,}3$.

24. Запишите выражение с помощью черты дроби и найдите его значение:

а) $(0{,}35 : 4{,}9) \cdot 0{,}2$; в) $(0{,}324 : 1{,}08) : 0{,}033$;
б) $0{,}016 : (0{,}24 \cdot 0{,}02)$; г) $1{,}65 : (0{,}63 : 0{,}12)$.

25. Вычислите:

а) $\frac{0{,}02 \cdot 21}{2{,}8 \cdot 0{,}3}$; б) $\frac{0{,}6 \cdot 2}{0{,}4 \cdot 0{,}9}$; в) $\frac{0{,}6 \cdot 0{,}08}{1{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}007}$; г) $\frac{0{,}15 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}75}{12{,}5 \cdot 0{,}36}$.

26. Выполните умножение или деление:

а) $0{,}12 \cdot \frac{1}{15}$; в) $1\frac{1}{6} : 1{,}4$; д) $-1{,}44 \cdot \frac{5}{12}$; ж) $-2{,}2 : \left(-1\frac{1}{3}\right)$;
б) $\frac{5}{36} \cdot 0{,}8$; г) $4{,}8 : \frac{6}{7}$; е) $0{,}28 : \left(-\frac{14}{17}\right)$; з) $1\frac{1}{15} \cdot (-0{,}5)$.

27. Вычислите устно:

а) $2{,}88 \cdot 0{,}5$; б) $0{,}25 \cdot 16{,}64$; в) $64 \cdot 0{,}125$; г) $0{,}5 \cdot 0{,}098$.

Образец. $0{,}84 \cdot 0{,}25 = 0{,}84 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}84 : 4 = 0{,}21$.

28. Найдите значение выражения:

а) $\frac{c}{a+b}$ при $a = -3,\ b = -7,\ c = 4$;
б) $\frac{a}{bc}$ при $a = -20,\ b = 6,\ c = -10$;
в) $\frac{ab}{c}$ при $a = 0{,}3,\ b = -7{,}2,\ c = -4{,}5$;
г) $\frac{a}{b-c}$ при $a = -0{,}5,\ b = 0{,}65,\ c = -0{,}6$.

29. Пусть $x = -\frac{1}{3}$ и $y = 0{,}5$. Найдите значение каждого из выражений:

$$-(x + y);\ -(x - y);\ -(-x + y);\ -(-x - y).$$

30. Подставьте вместо букв заданные числа и найдите значение выражения:

а) $(a + c)(a - c)$ при $a = 0{,}2$, $c = -0{,}6$;

б) $\frac{a+c}{a-c}$ при $a = 2{,}5$, $c = -1$;

в) $ac(a - c)$ при $a = -2{,}4$, $c = 0{,}1$;

г) $\frac{a-c}{ac}$ при $a = -4{,}5$, $c = -3$.

31. Найдите значение выражения при $m = 2$, $n = -\frac{2}{3}$:

а) $\frac{m-n}{m}$; б) $\frac{m+n}{n}$; в) $\frac{m}{m+n}$; г) $\frac{n}{m-n}$.

Б

32. Замените в выражении каждый знак деления дробной чертой:

а) $(a : b) : c$; б) $a : (b : c)$; в) $(a : b) \cdot (c : d)$; г) $(a : b) : (c : d)$.

33. Найдите значение выражения $\frac{a(b-c)}{a-c} + \frac{b(c-a)}{b-a} + \frac{c(a-b)}{c-b}$ при:

а) $a = -3$, $b = 2$, $c = -0{,}5$; б) $a = -0{,}5$, $b = 1$, $c = -2$.

34. Убедитесь, что при данных значениях x, y, z значение выражения $\frac{x-y}{z-y} + \frac{x-z}{y-z}$ равно 1:

а) $x = 12$, $y = 4$, $z = -5$;
б) $x = -2{,}5$, $y = 2{,}5$, $z = 3$;
в) $x = 105$, $y = 20{,}5$, $z = -65$.

35. (*Задание с выбором ответа.*) На координатной прямой отмечены числа a, b и c (рис. 1.2). Какое из утверждений неверно?

А. $a + c > 0$. **Б.** $a - b < 0$. **В.** $a + b > 0$. **Г.** $abc < 0$.

36. На координатной прямой отмечены числа a, b и c (рис. 1.3). Какое из двух утверждений верно:

а) $ab < b$ или $ab > b$;
б) $abc < a$ или $abc > a$;
в) $-ac < c$ или $-ac > c$?

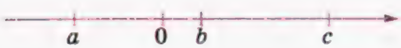


Рис. 1.2

Рис. 1.3

1.3 Степень с натуральным показателем

Вы знаете, что произведение одинаковых множителей записывают короче — в виде **степени:**

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}} = a^n.$$

Число a называют **основанием степени**, а число n — **показателем степени.**

Таким образом, выражение a^n означает произведение n множителей, равных a. Например: $4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$; $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$. Однако такой смысл этому выражению придается при $n \neq 1$ (ведь произведений из одного множителя не бывает). А чтобы выражение имело смысл при любом натуральном n, для случая $n = 1$ принимают специальное соглашение. Считают, что *первая степень любого числа равна самому числу*: $a^1 = a$.

Вычислить степень числа, или, как говорят, возвести число в степень, можно путем последовательного умножения. Так, чтобы найти 2^5, нужно четыре раза выполнить умножение на 2:

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4,\ 2^3 = 4 \cdot 2 = 8,\ 2^4 = 8 \cdot 2 = 16,\ 2^5 = 16 \cdot 2 = 32.$$

В то же время процесс возведения в степень можно сократить, если множители в произведении сгруппировать так, чтобы можно было использовать уже известные результаты. Например:

$$2^8 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^3 \cdot 2^5 = 8 \cdot 32 = 256.$$

Обратите внимание: степени числа 2 с увеличением показателя возрастают очень быстро. В самом деле,

$$2^{10} = 2^8 \cdot 2^2 = 256 \cdot 4 = 1024,$$
$$2^{20} = 2^{10} \cdot 2^{10} = 1024 \cdot 1024 = 1\,048\,576,$$
$$2^{30} = 2^{20} \cdot 2^{10} = 1\,048\,576 \cdot 1024 = 1\,073\,741\,824.$$

Таким же свойством обладает любая степень с основанием, большим 1. Эта особенность степени положена в основу древней индийской легенды.

Рассказывают, что изобретатель шахмат в награду за свое изобретение попросил у раджи немного риса: на первую клетку доски он попросил положить 1 зерно, на вторую — в 2 раза больше, т. е. 2 зерна, на третью — еще в 2 раза больше, т. е. 4 зерна, и т. д. до 64-й клетки. Его просьба показалась радже слишком скромной, однако вскоре выяснилось, что выполнить ее невозможно.

Число зерен, которое потребовал в награду изобретатель шахмат, выражается суммой

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{63}.$$

Эта сумма равна огромному числу 18 446 744 073 709 551 615, и она столь велика, что этим количеством зерна можно было бы покрыть слоем в 1 см всю поверхность нашей планеты, включая Мировой океан.

Основание степени может быть любым числом — положительным, отрицательным, нулем. При возведении в степень отрицательного числа в результате может получиться как положительное число, так и отрицательное. Это зависит от того, четным или нечетным числом является показатель степени.

Например:

$$(-2)^4 = \underbrace{(-2)\cdot(-2)}_{+}\cdot\underbrace{(-2)\cdot(-2)}_{+} = 16, \text{ т. е. } (-2)^4 > 0;$$

$$(-2)^5 = \underbrace{(-2)\cdot(-2)}_{+}\cdot\underbrace{(-2)\cdot(-2)}_{+}\cdot(-2) = -32, \text{ т. е. } (-2)^5 < 0.$$

Вообще полезно помнить, что *степень с отрицательным основанием положительна, если показатель степени четный, и отрицательна, если показатель степени нечетный.*

Использование степеней делает выражение более компактным, «обозримым». Особенно часто степени употребляются при записи физических величин, которые, как известно, могут быть очень большими и очень маленькими. Их записывают с помощью степени с основанием 10.

В справочниках можно увидеть, что, например, масса Земли равна $5{,}978 \cdot 10^{24}$ кг, а масса атома водорода — $1{,}674 \cdot 10^{-24}$ г. Понятно, что 10^{24} — это произведение 24 множителей, равных 10, т. е. масса Земли (в килограммах) равна

$$5\ 978\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000.$$

А что означает выражение 10^{-24}? В математике это выражение тоже считается степенью, но смысл у него иной, чем у степени с натуральным показателем.

Если масса Земли выражается очень большим числом, то масса атома водорода очень мала. И нетрудно догадаться, что если в первом случае имеется в виду умножение на 10^{24}, то во втором — деление на 10^{24}:

$$1{,}674 \cdot 10^{-24} = \frac{1{,}674}{10^{24}}.$$

Иными словами, выражение 10^{-24} считают равным $\frac{1}{10^{24}}$.

А

37. Запишите каждое выражение в виде произведения или степени:

а) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ и $2 + 2 + 2 + 2 + 2$;

б) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$;

в) $a + a + a$ и $a \cdot a \cdot a$;

г) $\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{20\text{ множителей}}$ и $\underbrace{x + x + x + \ldots + x}_{20\text{ слагаемых}}$.

38. Запишите выражение короче, используя степени:

а) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$;

б) $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$;

в) $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{n\text{ множителей}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{m\text{ множителей}}$;

г) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) + 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$;

д) $2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$;

е) $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{m\text{ множителей}} + \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{n\text{ множителей}}$.

39. Упростите:

а) $a \cdot a \cdot a \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$;

б) $3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$;

в) $a \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$;

г) $(c + d) \cdot (c + d) \cdot (c + d) \cdot (c + d)$.

40. Вычислите:

а) 15^2; 20^3; 9^3;

б) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; $\left(4\frac{1}{2}\right)^2$;

в) $1{,}5^2$; $2{,}1^2$; $0{,}5^3$;

г) $(-3)^4$; $(-4)^3$; $(-2)^5$;

д) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$; $\left(-1\frac{1}{3}\right)^2$;

е) $(-1{,}5)^2$; $(-0{,}2)^3$; $(-0{,}1)^5$.

41. Восстановите число, для которого записано разложение на простые множители:

а) $\ldots = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$; б) $\ldots = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$; в) $\ldots = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$.

42. Разложите на простые множители число:

а) 72; б) 96; в) 400; г) 300.

43. Прочитайте в объяснительном тексте, как выполнено вычисление 2^8.

Найдите: 5^2, 5^3, 5^4, 5^5. Пользуясь полученными результатами, вычислите: 5^7, 5^{10}, 5^{15}, 5^{20}.

44. Число 64 можно по-разному представить в виде степени:

$$64 = 2^6 = 4^3 = 8^2.$$

Запишите разными способами в виде степени следующие числа: а) 16; б) 81; в) 256; г) 625; д) 729; е) 1 000 000.

45. Представьте разными способами 3^8 в виде произведения:

а) двух степеней с основанием 3;
б) трех степеней с основанием 3;
в) четырех степеней с основанием 3.

46. Запишите в виде степени:

а) с основанием 7 произведения: $7^2 \cdot 7^8$; $7^4 \cdot 7^3 \cdot 7^{10}$; $7 \cdot 7^9 \cdot 7^3$; $7^m \cdot 7^n$;

б) с основанием a произведения: $a^5 \cdot a^6$; $a^{12} \cdot a^2 \cdot a^5$; $a^m \cdot a^n$; $a^x \cdot a^y \cdot a$.

47. Вычислите:

а) $8 + 7^2$, $(8 + 7)^2$, $8^2 + 7^2$;
б) $(11 - 6)^3$, $11 - 6^3$, $11^3 - 6^3$;
в) $5 \cdot 2^4$, $(5 \cdot 2)^4$, $5^4 \cdot 2^4$;
г) $(14 : 2)^3$, $14 : 2^3$, $14^3 : 2^3$.

48. Расставьте в выражении $30 : 5 - 10^3$ скобки всеми возможными способами и найдите значения получившихся выражений.

49. Вычислите:

а) $5 \cdot (-3)^3 + 7$;
б) $-2 \cdot (-1{,}1)^2 - 15$;
в) $10 - 7 \cdot (-2)^7$;
г) $-20 - 10 \cdot (-0{,}1)^2$;
д) $7 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 - 8$;
е) $-10 \cdot (-0{,}3)^2 - 5 \cdot (-0{,}3) + 1$.

50. Заполните таблицу:

a	0	1	−1	10	−10	0,1	−0,1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
a^2									
a^3									
a^4									

Найдите в таблице значения a, при которых выполняется условие: $a = a^2$; $a = a^3$; $a^2 = a^3$; $a^4 > a^2$; $a < a^2$; $a^3 < a$.

51. Не выполняя вычислений, определите знак результата:

а) $(-8)^7$;
б) $(-1)^{24}$;
в) $(-10)^{30} \cdot (-1)^{15}$;
г) $(-2)^9 \cdot (-5)^{11}$;
д) $(-6)^{17} \cdot (-7)^{16}$;
е) $(-1)^5 \cdot (-2)^{10} \cdot (-3)^{15}$.

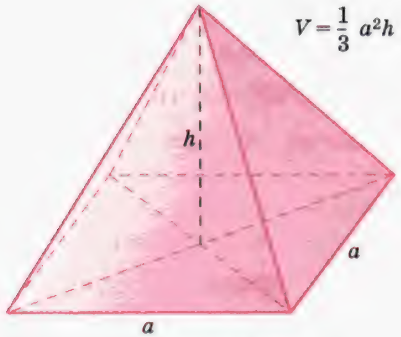


Рис. 1.4

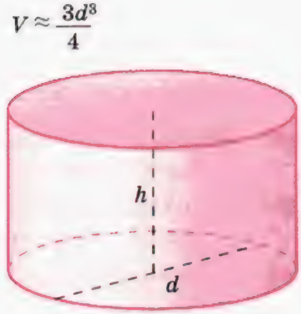


Рис. 1.5

52. (*Задание с выбором ответа.*) Какое из неравенств верно?

А. $\frac{(-5)^{12}}{(-6)^{15}} > 0$. **Б.** $\frac{(-4)^{7}}{(-10)^{9}} < 0$. **В.** $\frac{(-1)^{20}}{(-8)^{14}} > 0$. **Г.** $\frac{(-2)^{5}}{(-3)^{10}} > 0$.

53. Зная, что $28^2 = 784$, найдите значение каждого из выражений: $(-28)^2$; -28^2; $-(-28)^2$; $-(-(-28)^2)$; $-(-(-28))^2$.

54. Запишите выражение и найдите его значение:

а) сумма квадратов чисел -3 и 4; квадрат суммы чисел -3 и 4;
б) квадрат разности чисел 0,3 и 1,3; разность квадратов чисел 0,3 и 1,3;
в) разность кубов чисел 2 и 3; куб разности чисел 2 и 3;
г) куб суммы чисел 0,3 и $-0{,}1$; сумма кубов чисел 0,3 и $-0{,}1$.

55. Найдите значения выражений $9a^2$, $(9a)^2$, $-9a^2$, $(-9a)^2$:

а) при $a = \frac{1}{6}$; б) при $a = -0{,}1$.

56. а) Объем пирамиды, в основании которой квадрат (рис. 1.4), вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}a^2h$. Найдите объем пирамиды, если $a = 10$ см, $h = 16$ см. (Ответ округлите до единиц.)
б) Объем цилиндра, диаметр основания которого равен его высоте (рис. 1.5), можно приближенно вычислить по формуле $V \approx \frac{3d^3}{4}$. Найдите объем цилиндра при $d = 1{,}2$ м. (Ответ округлите до десятых.)

57. Представьте в виде степени с основанием 10 следующие числа:

а) 10; 100; 1000; 10 000; 100 000; 1 000 000;
б) 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001; 0,000001.

58. Запишите в виде суммы разрядных слагаемых число:

а) 213 475; б) 3 552 312; в) 24 015; г) 345 700.

Образец. $38\,232 = 3 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2$.

59. Используя степени числа 10, запишите, сколько в 1 км метров; сантиметров; миллиметров.

60. Используя степени числа 10, выразите в метрах 1 см; 1 мм; 1 мк (1 мк — один микрон, тысячная доля миллиметра).

61. а) Скорость света равна 300 000 км/с. Запишите эту величину с помощью степени числа 10.

б) Выразите скорость света в метрах в секунду и запишите результат с помощью степени числа 10.

62. Запишите величину, указанную в предложении, с помощью натурального числа или десятичной дроби:

а) расстояние от Земли до Плутона — самой далекой известной планеты Солнечной системы — равно $7{,}527 \cdot 10^9$ км;

б) расстояние от Земли до звезды Сириус равно $8{,}19 \cdot 10^{13}$ км;

в) радиус молекулы воды равен $1{,}4 \cdot 10^{-7}$мм;

г) диаметр атома водорода равен $9{,}2 \cdot 10^{-8}$ мм.

Б

63. Из выражений $(3{,}4 - 2{,}8)^3$, $-(2{,}8 - 3{,}4)^3$, $-(3{,}4 - 2{,}8)^3$ выберите те, значения которых противоположны значению выражения $(2{,}8 - 3{,}4)^3$; равны ему.

64. (*Задание с выбором ответа.*) Значение какого из данных выражений равно значению выражения $(23 - 1{,}7)^2$?

А. $-(23 - 1{,}7)^2$. **Б.** $-(1{,}7 - 23)^2$. **В.** $(1{,}7 - 23)^2$. **Г.** $-(23 + 1{,}7)^2$.

65. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $-1{,}2$; $-1{,}2^2$; $1{,}2$; $(-1{,}2)^2$;

б) $0{,}15$; $-0{,}15$; $(-0{,}15)^2$; $(-0{,}15)^3$.

66. Сравните числа a и a^2, если известно, что:

а) $a < 0$; б) $0 < a < 1$; в) $a > 1$.

(При необходимости проведите числовой эксперимент.)

67. Подберите наименьшее натуральное число n, такое, при котором выполняется неравенство: $2^n > 10$; $2^n > 10^2$; $2^n > 10^3$; $2^n > 10^4$; $2^n > 10^5$; $2^n > 10^6$.

(При необходимости воспользуйтесь калькулятором.)

68. При каком наименьшем натуральном n выполняется неравенство:

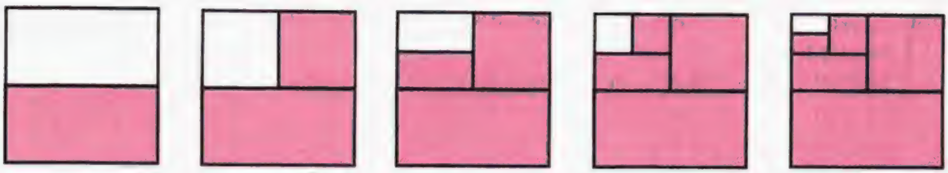
$0{,}1^n < 0{,}01$; $0{,}1^n < 0{,}0001$; $0{,}1^n < 0{,}0000001$; $0{,}1^n < 0{,}\underbrace{0 \dots 01}_{50\ \text{цифр}}$?

69. Иван решил накопить деньги для покупки подарков к Новому году. У него есть 100 рублей и две возможности увеличивать эту сумму: или еженедельно добавлять к ней 100 рублей, или еженедельно увеличивать ее в 1,4 раза. Продолжите заполнение таблицы, в которой приводятся расчеты накопленной суммы при первом и втором способах накопления. (При необходимости используйте калькулятор.)

Количество недель	Накопленная сумма (в рублях)	
	I способ	II способ
1	$100 + 100 = 200$	$100 \cdot 1{,}4 = 140$
2	$100 + 2 \cdot 100 = 300$	$(100 \cdot 1{,}4) \cdot 1{,}4 = 100 \cdot 1{,}4^2 = 196$
3	$100 + 3 \cdot 100 = \dots$	$100 \cdot 1{,}4^3 = \dots$
4		
5		
6		
...		
...		

Какой из этих способов выгоднее, если Иван планирует копить деньги в течение 4 недель? 6 недель? Какую сумму он мог бы накопить за полгода в первом и во втором случаях? (Считайте, что в месяце четыре недели.)

70. Лист бумаги 6 раз перегнули пополам. Чему будет равна толщина сложения, если толщина листа бумаги 0,1 мм? Запишите ответ, используя степень числа 2, и вычислите значение получившегося выражения.



$1-\frac{1}{2}$	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$	...	...	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$	...	...	...

Рис. 1.6

71. (*Задача-исследование.*) Квадрат со стороной 1 м закрашивают по частям, как показано на рисунке (рис. 1.6). На каждом шаге закрашивается половина незакрашенной части.

1) Для первых двух квадратов записаны по два выражения для вычисления площади закрашенной части. Запишите соответствующие выражения для остальных квадратов на рисунке.

2) Запишите два разных выражения для вычисления площади закрашенной части квадрата, получившейся на десятом шаге; на сотом шаге.

3) Используйте полученный результат для вычисления значения выражения $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.

1.4 Задачи на проценты

При решении задач на проценты нужно уметь свободно переходить от дробей к процентам и наоборот. Это совсем нетрудно, если помнить, что под процентом понимают $\frac{1}{100}$ часть рассматриваемой величины.

Пусть, например, известно, что 0,48 смеси лекарственных трав составляет ромашка. Выразим эту величину в процентах.

Так как $\frac{1}{100}$ часть смеси — это 1% от всей смеси, а $0{,}48=\frac{48}{100}$, то ромашка составляет 48% смеси трав.

Из приведенного рассуждения понятно следующее правило:

> если часть величины, заданную десятичной дробью, надо выразить в процентах, то можно в этой дроби перенести запятую на два знака вправо и к полученному числу приписать знак %.

Например:

0,48 некоторой величины — это 48% этой величины;
0,325 некоторой величины — это 32,5% этой величины;
0,001 некоторой величины — это 0,1% этой величины;
1,2 некоторой величины — это 120% этой величины.

Для обратного перехода — от процентов к десятичной дроби — запятую переносят в противоположном направлении:

> если часть величины, заданную в процентах, нужно выразить десятичной дробью, то можно в числе, стоящем перед знаком %, перенести запятую на два знака влево.

Например:

48% некоторой величины — это 0,48 этой величины;
32,5% некоторой величины — это 0,325 этой величины;
0,1% некоторой величины — это 0,001 этой величины;
120% некоторой величины — это 1,2 этой величины.

Чтобы выразить в процентах часть величины, заданную обыкновенной дробью, нужно сначала эту дробь обратить в десятичную. Например:

$\frac{3}{8} = 0{,}375$, т. е. $\frac{3}{8}$ — это 37,5%;

$\frac{1}{3} \approx 0{,}33$, т. е. $\frac{1}{3}$ — это примерно 33%.

Полезно также помнить, как выражаются в процентах некоторые дроби. Примеры таких дробей приведены в таблице:

$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
10%	20%	25%	50%	75%

Поскольку проценты выражаются дробями, то задачи на проценты, по существу, являются теми же задачами на дроби.

■ Задача 1. По данным социологического исследования, проведенного в этом году, в городе Лукошкино проживает 36 тыс. человек, 29% из них достигли пенсионного возраста, а 24% — дети и подростки дошкольного и школьного возраста. Сколько в городе взрослых жителей, не достигших пенсионного возраста?

Решение. Все население города принимаем за 100%. Выясним, сколько процентов приходится на взрослых, не достигших пенсионного возраста:

$$100\% - (29\% + 24\%) = 47\%.$$

Далее находим 47% от 36 тыс. Так как 47% — это 0,47 населения города, то 36 000 нужно умножить на 0,47:

$$36\,000 \cdot 0{,}47 = 16\,920.$$

Таким образом, в городе Лукошкино живет примерно 17 тыс. взрослых, не достигших пенсионного возраста.

■ Задача 2. Банк предлагает своим клиентам следующие условия вклада: деньги кладутся на счет на 31 день, по истечении которых клиент получает доход, равный 7,5% от вложенной суммы. Какую сумму нужно положить на счет, чтобы доход составил 1500 р.?

Решение. 1500 р. составляют 7,5%, или иначе 0,075, от неизвестной суммы. И нам нужно решить знакомую задачу — найти целое по его части. Она решается делением:

$$1500 : 0{,}075 = 20\,000 \text{ (р.)}.$$

Итак, на счет надо положить 20 000 р.

■ Задача 3. Январский тираж нового ежемесячного журнала составил 250 экземпляров. В феврале его тираж увеличился на 30%, а в марте — еще на 120%. Каким стал тираж журнала в марте?

Решение.

Способ 1. Сначала узнаем, на сколько экземпляров вырос тираж в феврале, т. е. найдем 30% от 250:

30% тиража — это 0,3 тиража: $250 \cdot 0{,}3 = 75$ (экз.).

Теперь можно определить величину февральского тиража:

$$250 + 75 = 325 \text{ (экз.)}.$$

Чтобы узнать мартовский тираж журнала, нужно найти 120% от февральского тиража и прибавить полученное число к 325:

120% тиража — это 1,2 тиража: $325 \cdot 1{,}2 = 390$ (экз.);

$$325 + 390 = 715 \text{ (экз.)}.$$

Способ 2. Январский тираж журнала примем за 100%. В феврале тираж журнала увеличился на 30% и составил 100% + 30% = = 130% январского тиража. Так как 130% соответствуют дроби 1,3, то февральский тираж больше январского в 1,3 раза. Найдем его:

$$250 \cdot 1{,}3 = 325 \text{ (экз.)}.$$

Теперь 100% — это февральский тираж. В марте он увеличился на 120% и составил 100% + 120% = 220% февральского тиража. Так как 220% — это 2,2, то мартовский тираж больше февральского в 2,2 раза, т. е. он равен

$$325 \cdot 2{,}2 = 715 \text{ (экз.)}.$$

■ Задача 4. Во время весенней распродажи куртку, стоившую 1500 р., продавали за 900 р. На сколько процентов была снижена цена куртки на распродаже?

Решение. Сначала узнаем, на сколько рублей новая цена меньше старой:

$$1500 - 900 = 600 \text{ (р.)}.$$

Теперь выясним, сколько процентов составляет разница в 600 р. от старой цены куртки. Для этого найдем отношение 600 р. к 1500 р. и выразим его в процентах:

$$\frac{600}{1500} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Так как 0,4 — это 40%, то цена куртки на распродаже была снижена на 40%.

■ Задача 5. К 100 г 30%-ного раствора соли долили 50 г воды. Какова концентрация получившегося раствора?

Решение. Так как исходный раствор был 30%-ный, то в 100 г раствора содержится 30 г соли. После того как к раствору долили 50 г воды, его масса стала равной 150 г, а количество соли в нем не изменилось. Чтобы узнать концентрацию получившегося раствора, нужно найти отношение массы соли к массе раствора и выразить его в процентах:

$$\frac{30}{150} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Значит, концентрация получившегося раствора 20%.

А

72. а) Части городского бюджета, предназначенные для нужд города, выражаются следующими десятичными дробями: 0,04; 0,27; 0,3; 0,255; 0,0006. Выразите эти десятичные дроби в процентах.

б) На выборах в областную администрацию пять кандидатов на одно место получили соответственно 63%, 25%, 10,5%, 0,93% и 0,57% голосов избирателей. Выразите эти проценты десятичными дробями.

73. На диаграмме (рис. 1.7) представлены результаты опроса «Для чего вы покупаете велосипед?». Найдите недостающие на диаграмме данные и вычислите, сколько человек дали каждый из ответов, если было опрошено 5600 человек.

Рис. 1.7

74. В состав одного из поливитаминов входят минералы в следующих количествах: кальций и фосфор — по 4%, магний — 1,6%, железо — 0,07%, цинк — 0,06%. Сколько миллиграммов каждого минерала содержится в одной таблетке поливитамина, масса которой 250 мг?

75. В декабре сотрудникам фирмы была выплачена премия в размере 250% ежемесячной зарплаты.

а) Какую премию получил сотрудник, зарплата которого была 6000 р.?

б) Какую сумму получил в декабре сотрудник, зарплата которого 7500 р.?

76. а) В магазин привезли 160 упаковок консервированных овощей и фруктов. Овощные консервы составили 75% привезенного товара, причем 40% из них были в стеклянных банках. Какое количество упаковок, содержащих овощные консервы в стеклянных банках, привезли в магазин?

б) Из 850 учащихся школы 80% занимаются в спортивных секциях, причем 5% из них — в шахматной. Сколько учащихся в шахматной секции?

77. а) В городе A 450 тыс. жителей. В избирательные списки внесено 76% жителей этого города. Чтобы выборы состоялись, необходимо, чтобы в голосовании приняло участие не менее 25% избирателей, внесенных в списки. Можно ли считать, что выборы в городе A состоялись, если в день выборов на избирательные участки пришли 93 тыс. избирателей?

б) Из 550 учащихся школы в референдуме по вопросу о введении ученического совета участвовали 88% всех учащихся. На вопрос референдума 75% учащихся, принявших участие в голосовании, ответили «да». Совет будет создан, если за него выскажется не менее 60% учащихся школы. Будет ли создан ученический совет в этой школе?

78. К 1 июля на один из факультетов университета было подано 120 заявлений.

а) Сколько студентов может быть принято на этот факультет, если число мест составляет 75% от числа поданных заявлений?

б) Сколько мест на факультете, если количество заявлений составляет 75% от числа мест?

79. Морская вода содержит 5% соли.

а) Сколько соли в стакане морской воды (200 г)?

б) Какое количество морской воды надо взять, чтобы в ней содержалось 200 г соли?

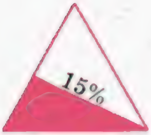


Рис. 1.8

80. Запишите в виде выражения:
а) 20% от суммы в a рублей;
б) сумму, 20% которой составляют a рублей.

81. а) В октябре расход электрических ламп на предприятии составил 600 штук. В ноябре он увеличился на 5%, а в декабре — еще на 10%. Определите расход электроламп в ноябре и декабре.
б) В марте расход электроэнергии в школе составил 1200 кВт · ч, но в апреле он уменьшился на 35%, а в мае — еще на 15%. Определите расход электроэнергии в мае.

82. (*Задание с выбором ответа.*) На весенней распродаже в магазине товар стоимостью 350 р. уценили на 40%, а через неделю — еще на 5%. В супермаркете такой же товар уценили на 5%, а через неделю — еще на 40%. А на ярмарке этот же товар уценили на 45%. Где выгоднее купить этот товар?

А. В магазине.
Б. В супермаркете.
В. На ярмарке.
Г. Разницы в ценах нет.

83. Крутизна спуска дороги — это отношение высоты подъема дороги к ее горизонтальной протяженности. Обычно ее выражают в процентах (рис. 1.8). Найдите крутизну спуска дороги, если высота подъема равна 60 м, а горизонтальная протяженность 1,5 км.

84. а) В таблице указаны цены на некоторые товары в мае и декабре.

Товар	Цена в мае	Цена в декабре
Шарф	340 р.	391 р.
Зонт	550 р.	418 р.
Велосипед	3720 р.	3255 р.

На сколько процентов повысилась или понизилась цена каждого товара в декабре по сравнению с майской ценой? На сколько процентов майская цена была выше или ниже декабрьской? (Ответ округлите до единиц.)

б) В городских новостях прозвучало сообщение: цена одного товара, пользовавшегося повышенным спросом, в течение года выросла с 18 до 28 р., т. е. почти на 30%. Верный ли вывод сделан о росте цены?

Б

85. а) Представьте в виде круговой диаграммы состав лекарственного сбора: корня солодки — 27%, корня алтея — 29,8%, листьев шалфея — 14,4%, плодов аниса — 14,4%, почек сосны — 14,4%.
Указание. В расчетах для построения диаграммы результаты округляйте до целых. Например, чтобы выделить сектор для изображения 14,4%, надо найти 14,4% от 360°. Получим $360° \cdot 0{,}144 = 51{,}84° \approx 52°$. (Используйте калькулятор.)
б) На книжной ярмарке за 3 дня продали все школьные учебники. В пятницу продали 300 учебников, в субботу — 420, в воскресенье — 530 учебников. Определите, какой процент от всех имевшихся на ярмарке школьных учебников составляют проданные в каждый из этих трех дней. Используя полученные результаты, проиллюстрируйте условие задачи с помощью круговой диаграммы.

86. а) Летом на дачу с детским садом выехало 180 детей. Известно, что 10% детей не поехало на дачу. Сколько всего детей в детском саду?
б) Когда 130 пассажиров заняли в самолете свои места, остались свободными 35% всех мест. Сколько пассажиров вмещает самолет?

87. Морская вода содержит 5% соли. Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в смеси составило 2%?

88. Имеется творог двух сортов: жирный содержит 20% жира, а нежирный содержит 5% жира. Определите процент жирности полученного творога, если смешали:
а) 2 кг жирного и 3 кг нежирного творога;
б) 3 кг жирного и 2 кг нежирного творога.

89. а) В голосовании на выборах в окружную администрацию приняло участие 65% избирателей округа, 40% из них проголосовало за кандидата А. Сколько процентов избирателей данного округа отдало голоса за этого кандидата?
б) Легковые автомобили составляют 60% всего транспорта автопарка, 90% из них — автомобили, выпущенные в России, причем 50% из них — автомобили ВАЗ. Какой процент автомобилей всего автопарка составляют автомобили ВАЗ?

90. В одной из газет автор заметки писал о скидках, к которым прибегают в магазинах перед большими праздниками. Продавцы заранее увеличивают цены на 20%, а потом делают большую праздничную скидку на 30%. По мнению автора, скидка фактически составляет всего лишь 10%. А сколько она составляет на самом деле?

91. а) Автомобиль прошел 40% пути, а затем 30% оставшегося расстояния. Сколько процентов всего пути ему осталось пройти?
б) Перед поездкой бак автомобиля был заполнен на 80%. Во время поездки было истрачено 25% имевшегося запаса бензина. На сколько процентов был заполнен бензином бак к концу поездки?

92. а) В школе 16% девочек и 28% мальчиков занимаются в спортивных секциях. Сколько всего процентов школьников занимается в спортивных секциях, если число мальчиков и число девочек в школе одинаково?
б) В школьном оркестре играют 12% всех мальчиков, которые учатся в школе, и 8% всех девочек. Сколько всего процентов учащихся школы играет в оркестре, если мальчики составляют $\frac{3}{5}$ всех учащихся школы?

93. Решите задачу, используя схематические рисунки.
а) Книга дороже альбома на 25%. На сколько процентов альбом дешевле книги?

Решение. Цена альбома — 100%. Изобразим ее каким-либо отрезком. Увеличим этот отрезок на 25%, т. е. на $\frac{1}{4}$ его длины; получим отрезок, соответствующий цене книги (рис. 1.9, *а*). Теперь цена книги составляет 100% (рис. 1.9, *б*). Она изображена большим отрезком. Цена альбома меньше цены книги на $\frac{1}{5}$ этого отрезка. Так как $\frac{1}{5}$ составляет 20%, то альбом дешевле книги на 20%.

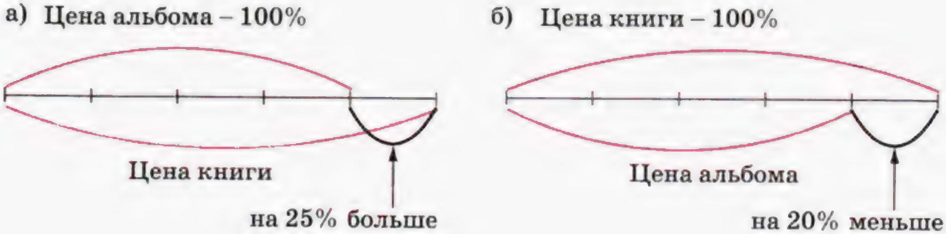


Рис. 1.9

б) Блюдце на 20% дешевле тарелки. На сколько процентов тарелка дороже блюдца?
в) Чашка на 20% дороже блюдца. Какую часть стоимости чашки составляет стоимость блюдца? На сколько процентов блюдце дешевле чашки?
г) Цена книги была повышена на 10%. В конце года вновь была установлена старая цена. На сколько процентов снизили цену книги в конце года?

1.5 Статистические характеристики

Ученик получил в течение четверти следующие отметки по алгебре: 5, 2, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5. Какую четвертную отметку поставит ему учитель? Многих школьников волнует подобная проблема, и чаще всего ученики решают ее следующим естественным образом: складывают все отметки и делят сумму на их количество. В нашем случае получим

$$\frac{5+2+4+5+5+4+4+5+5+5}{10} = 4{,}4\ .$$

Число 4,4 называют **средним арифметическим** исходных чисел.

> Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на их количество.

В этом примере среднее арифметическое можно было найти немного иначе. Двойку ученик получил только один раз, четверку — 3 раза, а пятерок у него было 6. Поэтому среднее арифметическое быстрее подсчитать так:

$$\frac{2\cdot 1+4\cdot 3+5\cdot 6}{10} = 4{,}4\ .$$

Среднее арифметическое является важной характеристикой ряда чисел, в нашем случае отметок за четверть, но иногда полезно рассматривать и другие *средние*. Например, претендуя на «5», ученик наверняка будет использовать такой аргумент: «Чаще всего в четверти я получал пятерки!» Статистик в этом случае сказал бы иначе: «**Модой** этого ряда является число 5».

> Модой называют число ряда, которое встречается в этом ряду наиболее часто.

Можно сказать, что данное число самое «модное» в этом ряду.

В отличие от среднего арифметического, которое можно вычислить для любого числового ряда, моды у ряда вообще может не быть. Например, если ученик получил по русскому языку отметки «4», «2», «3», «5», то каждая отметка встречается в этом ряду только один раз и среди них нет числа, встречающегося чаще других. Значит, у этого ряда нет моды. А среднее арифметическое, конечно, есть: $\frac{2+3+4+5}{4} = 3{,}5$.

Такой показатель, как мода, используется не только для числовых данных. Вы уже знакомы с социологическими опросами. Если, например, опросить большую группу учеников, какой школьный предмет им нравится больше всего, то модой этого ряда ответов окажется тот предмет, который будут называть чаще остальных.

Мода — показатель, который широко используется в статистике. Одним из наиболее частых использований моды является изучение спроса. Например, при решении вопросов, в пачки какого веса фасовать масло, какие открывать авиарейсы и т. п., предварительно изучается спрос и выявляется мода — наиболее часто встречающийся заказ.

Заметим, что в реальных статистических исследованиях, при большом числе данных рассматривают все значения, которые встречаются гораздо чаще других. Каждое из них статистики также называют модой.

Однако нахождение среднего арифметического или моды далеко не всегда позволяет делать надежные выводы на основе статистических данных. Например, известно, что на планете Меркурий средняя температура $+15°$. Исходя из этого статистического показателя можно подумать, что на Меркурии умеренный климат, удобный для жизни людей. Но на самом деле это не так. Температура на Меркурии колеблется от наименьшего значения $-150°$ до наибольшего значения $+350°$. Значит, если у нас есть ряд данных, то для обоснованных выводов и надежных прогнозов на их основе, помимо средних значений, надо еще указать, насколько используемые данные различаются между собой.

Одним из статистических показателей различия или разброса данных является **размах**.

Размах — это разность между наибольшим и наименьшим значениями ряда данных.

Для температуры на Меркурии, например, размах равен $350° - (-150°) = 500°$. Конечно, такого перепада температур человек выдержать не может.

Помимо размаха, во многих случаях важны сами наибольшие или наименьшие значения данных. Например, если для исследования того же Меркурия посылается спутник, необходимо, чтобы приборы работали и при наибольших, и при наименьших возможных температурах.

А

94. Найдите среднее арифметическое ряда:

а) 31; 36; 69; 24; 20; 48;
б) 1,6; 4,9; 12,4; 3,1.

95. Найдите моду ряда:

а) 13; 15; 13; 12; 12; 12; 13; 14; 13; 15; 13;
б) 39; 54; 33; 36; 20; 29; 35; 50; 21.

96. Найдите размах ряда:

а) 12; 25; 38;
б) 5; 17; 0; 26; 14;
в) 293; 812; 90; 2; 373; 28;
г) 7,2; −0,6; −4,5; 6,3; 1,1.

97. Измерив рост двенадцати солдат (в см), получили следующие данные: 178, 169, 191, 182, 171, 173, 174, 180, 179, 164, 178, 185. Найдите средний рост солдата и число солдат выше среднего роста. (Используйте калькулятор.)

98. В отделе мужской обуви универмага в течение дня производился учет размеров пар купленной обуви. Были получены следующие результаты: 44, 40, 43, 39, 42, 42, 42, 45, 41, 43, 43, 41, 42, 46, 40, 41, 42, 39, 42, 45, 42, 43, 44, 44, 41, 42. Представьте эти результаты в виде таблицы:

Размер	39	40	41	42	...
Количество пар					

Чему равна мода ряда размеров? Что характеризует этот показатель?

99. На диаграмме (рис. 1.10) представлены данные о числе болельщиков, посетивших футбольные матчи на стадионе «Динамо» в Москве за месяц. Найдите размах посещаемости и среднюю посещаемость матча, округлив ее до сотен. (Используйте калькулятор.)

Рис. 1.10

100. В соревнованиях в стрельбе по мишени участвовало 12 человек, каждый из которых сделал по 10 выстрелов. В таблице указано число результативных выстрелов каждого из спортсменов:

Номер участника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число попаданий	8	6	7	8	8	5	6	9	8	8	5	9

Найдите среднее арифметическое, моду и размах ряда попаданий. Что характеризует каждый из этих показателей?

101. На соревнованиях по фигурному катанию девять судей поставили спортсмену следующие оценки:

5,5; 5,4; 4,9; 5,3; 5,0; 5,3; 5,4; 5,7; 5,4.

Найдите размах и моду ряда оценок. Отбросьте наибольшую и наименьшую оценки и найдите средний балл спортсмена.

102. У статистиков есть такая шутка: «Средняя глубина пруда 0,5 м, а корова-то утонула». Объясните смысл этой шутки.

Б

103. В течение четверти Лена получила следующие отметки по алгебре: три двойки, две тройки, четыре четверки и одну пятерку. Найдите среднее арифметическое и моду ряда отметок. Какую из этих характеристик Лена предпочла бы использовать при выставлении четвертной отметки?

104. В таблице представлены результаты контрольной работы по геометрии в 7 классе:

Отметка	2	3	4	5
Число учеников	4	8	12	6

Найдите моду ряда отметок и средний результат по контрольной.

105. В таблице представлены данные о количестве детей в семьях города:

Число детей в семье	0	1	2	3	4	5	6
Число семей	255	320	210	80	18	6	1

Найдите среднее число детей в семье и моду (количество детей в наиболее типичной семье). (Используйте калькулятор.)

106. По данным о количестве людей, посещавших выставку в течение недели (см. диаграмму на рисунке 1.11), был вычислен показатель, равный 43. Определите, какой показатель был вычислен: мода или среднее арифметическое.

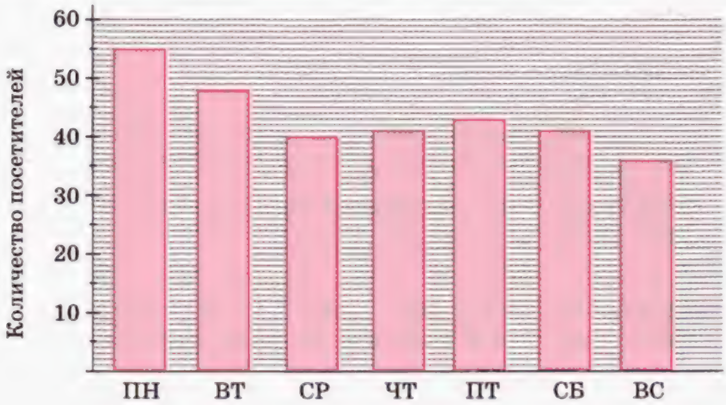


Рис. 1.11

107. Столбчатая диаграмма, изображенная на рисунке 1.12, показывает, сколько книг прочитал каждый из ребят за летние каникулы.

а) Найдите среднее арифметическое и моду этого ряда данных.

б) Оцените по этим данным, какое приблизительно количество книг прочитали за лето все ученики этой школы, если всего их 1200 человек.

1.6 Последняя цифра степени

(Для тех, кому интересно)

Проведем небольшое исследование: выясним, есть ли какая-нибудь закономерность в том, как меняется последняя цифра числа 2^n, где n — натуральное число, с изменением показателя n. Для этого рассмотрим таблицу:

$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$
$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$
$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$	$2^{11} = 2048$	$2^{12} = 4096$

Мы видим, что через каждые четыре шага последняя цифра повторяется. Заметив это, нетрудно определить последнюю цифру степени 2^n для любого показателя n.

В самом деле, возьмем число 2^{100}. Если бы мы продолжили таблицу, то оно попало бы в столбец, где находятся степени 2^4, 2^8, 2^{12}, показатели которых кратны четырем. Значит, число 2^{100}, как и эти степени, оканчивается цифрой 6.

Вообще все натуральные числа могут быть отнесены к одной из четырех групп: числа, делящиеся на 4, числа, дающие при делении на 4 остаток, равный 1, остаток, равный 2, или остаток, равный 3. И последняя цифра числа 2^n определяется тем, в какую из этих групп попадает показатель n. Так, например, число 2^{201} оканчивается цифрой 2, так как 201 при делении на 4 дает в остатке 1, а число 2^{202} — цифрой 4, так как $202 = 4 \cdot 50 + 2$.

110. Какими цифрами могут оканчиваться числа, получающиеся при возведении в степень числа 3? Какой цифрой оканчивается число: 3^{10}; 3^{15}; 3^{120}; 3^{126}?

111. Какими цифрами могут оканчиваться степени числа 7? Какой цифрой оканчивается число: 7^{40}; 7^{61}; 7^{30}; 7^{23}?

112. (*Задание с выбором ответа.*) Какое из чисел оканчивается той же цифрой, что и число 2^{10}?

А. 2^{100}. **Б.** 2^{101}. **В.** 2^{102}. **Г.** 2^{103}.

113. Докажите, что числа 3^{33}, 3^{333} и 3^{3333} оканчиваются одной и той же цифрой. Укажите еще какую-нибудь степень числа 3, которая оканчивается той же цифрой.

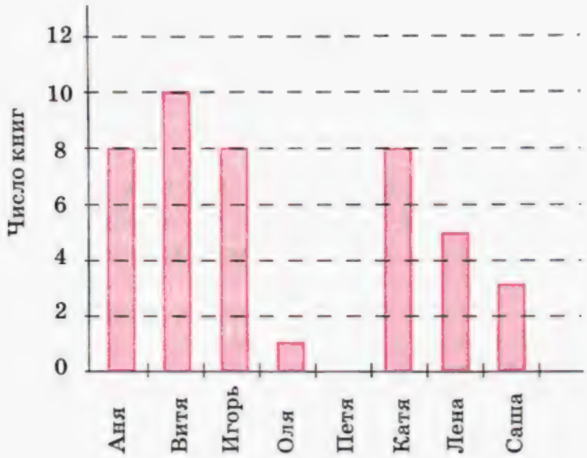


Рис. 1.12

108. Директор фирмы решил начать борьбу с курением и провел анализ заболеваемости своих сотрудников. Он выписал число рабочих дней, пропущенных в течение года по болезни каждым сотрудником, предварительно разбив их на две группы — курящие и некурящие. Получились такие результаты:
Курящие: 7, 5, 2, 6, 4, 4, 6, 7, 9, 7, 0, 8, 11, 8.
Некурящие: 3, 3, 6, 0, 3, 6, 2, 2, 4, 5, 13, 4, 3, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 4.
Директор сделал по этим результатам убедительные выводы о вреде курения. Сделайте и вы то же самое.

109. (*Задача-исследование.*)
1) Вычислите среднее арифметическое ряда:

2, 8, 16, 24, 30, 40.

Используя полученный результат, попробуйте догадаться, чему равны средние арифметические следующих рядов:

12, 18, 26, 34, 40, 50;
20, 80, 160, 240, 300, 400.

Проверьте себя с помощью вычислений.

2) Как изменится среднее арифметическое ряда, если:
а) ко всем членам ряда прибавить одно и то же число;
б) все члены ряда умножить на одно и то же положительное число?

Изменятся ли при этом мода и размах?

123. Вычислите значение выражения при $a = 1{,}5$, $b = 0{,}7$, $c = -0{,}5$:

а) $\dfrac{a-b}{a+b} + \dfrac{b-c}{b+c} + \dfrac{c-a}{c+a}$; б) $\dfrac{(b-a)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

124. Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

а) $\dfrac{(x+y)^2}{x-y}$ при $x = -7$, $y = 3$; при $x = 9$, $y = 11$;

б) $\dfrac{a^3 - b^3}{ab}$ при $a = 5$, $b = -1$; при $a = -2$, $b = 3$.

125. Сравните значения выражений:

а) $-\dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{4}\right)^3$ и $-\dfrac{1}{3} - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^3$;

б) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 - \dfrac{1}{2}$ и $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^3 - \left(-\dfrac{1}{5}\right)^2 - \dfrac{1}{5}$.

126. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $-0{,}11$, $(-0{,}11)^2$, $(-0{,}11)^3$, $(-0{,}11)^4$;

б) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{30}$, $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{30}$, $-\left(\dfrac{1}{7}\right)^{30}$.

Задачи на проценты

127. Изюм, получаемый при сушке винограда, составляет 32% его массы.
а) Сколько изюма получится из 5 кг винограда?
б) Из какого количества винограда получится 2 кг изюма?

128. а) Банк выплачивает владельцу денежного вклада 8% годовых. Какую сумму надо положить в банк, чтобы по истечении года получить доход в 1000 р.?
б) Магазин предлагает за 2000 р. дисконтную карту на год, которая дает право на 10% скидки при покупке товаров в этом магазине. На какую минимальную сумму необходимо приобрести товаров за этот год, чтобы покупка дисконтной карты оправдалась?

129. Среди участников кросса 35% — студенты, остальные — старшеклассники, причем их на 252 человека больше, чем студентов. Сколько спортсменов участвует в кроссе?

130. После повышения цены на 30% книга стала стоить 182 р. Сколько стоила книга до повышения цены?

114. Назовите какое-нибудь число, отличное от 0 и 1, любая степень которого оканчивается одной и той же цифрой. Приведите еще примеры таких чисел.

115. Сформулируйте условие, при котором числа 4^m и 4^n, где $m \in N$, $n \in N$, $m \neq n$, оканчиваются одной и той же цифрой.

116. Делится ли на 10: сумма $11^{14} + 3^{22}$; разность $7^{20} - 9^{10}$; произведение $12^{15} \cdot 15^{12}$?

ДЗ Дополнительные задания к главе 1

Вычисления с рациональными числами

117. Вычислите:

а) $0{,}8 + \left(-\frac{5}{6}\right)$; г) $\frac{2}{3} - 0{,}8$; ж) $4{,}2 : \left(-\frac{6}{7}\right)$;

б) $-\frac{1}{50} + 1{,}37$; д) $-\frac{2}{7} \cdot 1{,}4$; з) $0{,}16 : 2\frac{2}{5}$;

в) $-7{,}11 - \frac{1}{2}$; е) $-0{,}24 \cdot \left(-\frac{3}{16}\right)$; и) $3\frac{1}{5} : 0{,}64$.

118. В числителе дроби запишите произведение всех натуральных четных чисел, меньших 10, а в знаменателе — произведение всех натуральных нечетных чисел, меньших 10. Сократите полученную дробь и сравните ее с $\frac{1}{3}$.

119. Сравните дроби:

а) $\dfrac{1{,}4 \cdot 6 \cdot 0{,}28}{0{,}24 \cdot 0{,}2 \cdot 21}$ и $\dfrac{6{,}9 \cdot 9{,}6 \cdot 0{,}05}{4 \cdot 0{,}36}$; б) $\dfrac{1{,}5 \cdot 0{,}084}{0{,}18 \cdot 3{,}6}$ и $\dfrac{0{,}27 \cdot 0{,}05}{0{,}062 \cdot 0{,}75}$.

120. Вычислите:

а) $\dfrac{2{,}8 : 2\frac{4}{5} \cdot 2\frac{2}{3}}{1{,}6 : 1{,}3}$; б) $\dfrac{1{,}8 : 1\frac{1}{5} \cdot 0{,}12}{0{,}27 : \frac{2}{7}}$.

121. Вычислите и запишите ответ в виде десятичной дроби:

а) $\dfrac{\frac{4{,}5}{10{,}5} + \frac{10{,}5}{4{,}5}}{\frac{4{,}5}{10{,}5} - \frac{10{,}5}{4{,}5}}$; б) $\dfrac{\frac{0{,}5-1}{0{,}5+1} + \frac{0{,}5+1}{0{,}5-1}}{\frac{0{,}5-1}{0{,}5+1} - \frac{0{,}5+1}{0{,}5-1}}$.

122. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{70{,}2 \cdot 0{,}5}{9 \cdot 1\frac{1}{2}} - \dfrac{2{,}4 \cdot 10{,}8}{4 \cdot 1\frac{4}{5}} - \dfrac{1{,}4 \cdot 16{,}2}{3 \cdot 1\frac{1}{5}}$; б) $\dfrac{\frac{8}{15} \cdot 1\frac{9}{16}}{1{,}5} + \dfrac{1\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{5}}{1{,}6} + \dfrac{2\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{16}}{1{,}8}$.

131. Школьная баскетбольная команда из 16 игр, сыгранных на соревнованиях за год, выиграла 12. В следующем году она планирует сыграть на соревнованиях 22 игры. Сколько игр ей надо выиграть, чтобы ее результат в процентном отношении оказался по крайней мере не хуже?

132. При очистке орехов 60% уходит в отходы. Как вы думаете, что выгоднее — купить неочищенные орехи по цене 100 р. за килограмм или очищенные орехи по цене 250 р. за килограмм?

133. Сколько килограммов сливочного масла можно получить из 1000 кг молока жирностью 4,5%, если содержание жира в масле составляет в среднем 75%?

134. За час до киносеанса оставались непроданными 30% всех билетов. Но через полчаса к кинотеатру подъехала группа туристов и купила 45 билетов, что составило 20% билетов, оставшихся в кассе. Сколько всего мест в кинотеатре?

135. Собранный урожай яблок распределили следующим образом: 75% всех яблок засушили, 40% остатка пошло на варенье, а из оставшихся 3 кг яблок сварили компот. Сколько всего собрали яблок?

136. Бюджетные деньги, выделенные на школы двух районов, распределили между этими районами в отношении 3 : 5. Сколько процентов бюджетных денег досталось каждому району?

137. В пансионате имеются однокомнатные и двухкомнатные номера в отношении 5 : 3. Для отдыха с маленькими детьми оборудовано 16% однокомнатных и 4% двухкомнатных номеров. Сколько всего процентов номеров оборудовано для отдыхающих с маленькими детьми?

Среднее арифметическое

138. Все числа ряда равны между собой. Чему равно их среднее арифметическое?

139. Придумайте три разных числа, таких, чтобы их среднее арифметическое совпадало со вторым по величине числом. Может ли среднее арифметическое совпадать с наибольшим из трех чисел? с наименьшим?

140. Придумайте четыре разных числа, таких, чтобы их среднее арифметическое совпадало:
а) со вторым по величине числом;
б) с третьим по величине числом.

141. а) Среднее арифметическое ряда, состоящего из 10 чисел, равно 4. Найдите сумму этих чисел.
б) В ряду чисел 2, 7, 10, x, 18, 19, 27 одно число неизвестно. Найдите его, зная, что среднее арифметическое ряда равно 14.

142. а) Среднее арифметическое ряда, состоящего из 10 чисел, равно 5. К этому ряду приписали число 16. Чему теперь равно среднее арифметическое?
б) Среднее арифметическое ряда, состоящего из 8 чисел, равно 4. Из этого ряда вычеркнули число 11. Чему теперь равно среднее арифметическое?

143. Среднее арифметическое некоторых восьми чисел равно 15, а среднее арифметическое других двенадцати чисел равно 14. Найдите среднее арифметическое всех этих чисел.

Вопросы для повторения к главе 1

1. Сформулируйте перекрестное правило сравнения дробей. Проиллюстрируйте его на примере дробей $\frac{20}{33}$ и $\frac{9}{22}$. Как еще можно сравнить эти дроби?

2. Дано выражение $\frac{a-c}{ac}$. Запишите числовое выражение, которое получится в результате подстановки $a = -7$, $c = -10$. Прокомментируйте свои действия.

3. Что означает выражение a^n, где n — натуральное число? (Рассмотрите случаи $n \neq 1$ и $n = 1$.) Как называют выражение a^n? число a? число n?

4. Какой знак может иметь степень с отрицательным основанием? Приведите примеры.

5. Что означает запись 10^{-5}? Запишите с отрицательным показателем степени выражение $\frac{7}{10^{11}}$.

6. Какие статистические характеристики вы знаете? Что называется средним арифметическим нескольких чисел? Приведите пример ситуации, в которой вычисляется среднее арифметическое.

Задания для самопроверки к главе 1

(Обязательные результаты обучения)

1. Сравните числа: а) $\frac{8}{17}$ и $\frac{11}{21}$; б) 0,6 и $\frac{4}{7}$; в) $\frac{6}{25}$ и 0,219.

2. Расположите в порядке возрастания числа: 0,4; $\frac{3}{8}$ и $\frac{2}{3}$.

3. В результате реконструкции на одном комбинате производство бумаги увеличилось с 10 до 12 т в месяц, а на другом — с 12 до 14 т в месяц. На каком комбинате произведена более эффективная реконструкция?

4. Выполните действия:

а) $\frac{3}{4} + 0,123$; б) $0,3 - \frac{1}{6}$; в) $0,15 \cdot \frac{3}{5}$; г) $\frac{6}{25} : 0,12$.

5. Вычислите: а) $\frac{0,7 \cdot 0,02}{0,21}$; б) $7,5 : 1,25 \cdot 0,015$.

6. Найдите значение выражения:

а) $\frac{x + y}{z}$ при $x = 0,75$, $y = -2,25$, $z = -0,6$;

б) $\frac{a - x}{ax}$ при $a = 1,2$, $x = -0,3$.

7. Найдите значение степени:

а) $(-2)^5$; б) $\left(\frac{3}{5}\right)^3$; в) $(-0,1)^6$.

8. Вычислите:

а) $-5 \cdot 3^3$; в) $1 - 5 \cdot 0,4^2$;

б) $0,01 \cdot (-3)^4$; г) $10 \cdot (0,7 - 1,2)^3$.

9. Объем треугольной призмы, в основании которой равнобедренный прямоугольный треугольник (рис. 1.13), вычисляется по формуле $V = \frac{a^2h}{2}$. Найдите объем призмы, если $a = 8$ см, $h = 15$ см.

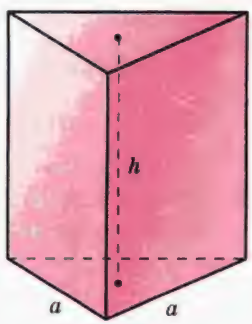


Рис. 1.13

10. Выразите в процентах десятичные дроби: 0,7; 0,15; 0,06; 0,075; 0,005.

11. Выразите десятичной дробью: 42%, 30%, 8%, 19,3% 0,7%.

12. Цена товара 1200 р. Сколько заплатит покупатель за этот товар, если он продается со скидкой 3,5%?

13. На первый курс медицинского училища может быть зачислено 60 учащихся. Поданные заявления составили 160% от этого числа. На «отлично» все экзамены сдали 25% поступающих. Сколько человек сдали экзамены на «отлично»?

14. В прошлом году в школе училось 600 учащихся, а в этом году их стало 660. На сколько процентов увеличилось число учащихся школы?

15. Найдите среднее арифметическое, моду и размах ряда:

$$4,\ 5,\ 5,\ 7,\ 5,\ 7,\ 9,\ 12.$$

Тест к главе 1

1. Какое из данных чисел наименьшее?

А. 0,44. **Б.** 0,8. **В.** $\frac{2}{5}$. **Г.** $\frac{4}{9}$.

2. Даны дроби $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$. Выберите из данных значений a и b такие, при которых $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

А. $a = 16$, $b = 15$. **В.** $a = -15$, $b = -16$.
Б. $a = -16$, $b = -15$. **Г.** $a = -15$, $b = 16$.

3. Найдите значение выражения $\frac{0,3 \cdot 0,25}{0,45}$.

Ответ. ____________

4. Даны выражения: I. $2,37 : (1,15 \cdot 0,18)$. II. $(2,37 : 1,15) \cdot 0,18$. III. $2,37 : (1,15 : 0,18)$. IV. $(2,37 : 1,15) : 0,18$.

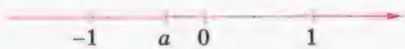
Какие из них равны дроби $\frac{2,37}{1,15 \cdot 0,18}$?

А. Только I. **Б.** I и IV. **В.** Только IV. **Г.** III и IV.

5. Найдите значение выражения $\frac{(a+x)(a-x)}{ax}$ при $a = -2$, $x = -0,2$.

Ответ. ____________

6. На координатной прямой отмечено число a. Какое из следующих неравенств неверно?



А. $\frac{1}{a} < -1$. **Б.** $-\frac{1}{a} > 1$. **В.** $\frac{1}{a} < a$. **Г.** $-\frac{1}{a} < a$.

7. Как можно записать короче выражение

$$\underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 7}_{10\ \text{множителей}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{20\ \text{множителей}}?$$

А. $7^{10} \cdot 5^{20}$. **В.** $10^7 \cdot 20^5$.
Б. $7^{10} + 5^{20}$. **Г.** $10^7 + 20^5$.

8. Вычислите $10 \cdot (-0{,}3)^3$.
Ответ. ________________

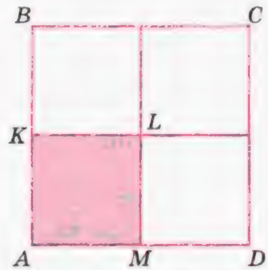
9. Расположите в порядке возрастания числа:
$-1{,}7$; $(-1{,}7)^2$; $(-1{,}7)^3$.

А. $-1{,}7$; $(-1{,}7)^2$; $(-1{,}7)^3$. **В.** $(-1{,}7)^3$; $-1{,}7$; $(-1{,}7)^2$.
Б. $(-1{,}7)^3$; $(-1{,}7)^2$; $-1{,}7$. **Г.** $-1{,}7$; $(-1{,}7)^3$; $(-1{,}7)^2$.

10. Найдите значение выражения $-((-1)^{10} - (-1)^{11})^2$.
А. -4. **Б.** -2. **В.** 0. **Г.** 4.

11. Соотнесите дроби, которые выражают доли некоторой величины, и соответствующие им проценты:

а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{3}{10}$; в) 0,07; г) 0,7.
1) 7%; 2) 60%; 3) 70%; 4) 30%.



12. На сколько процентов площадь квадрата $ABCD$ больше площади квадрата $AKLM$?
А. На 400%. **В.** На 75%.
Б. На 300%. **Г.** На 25%.

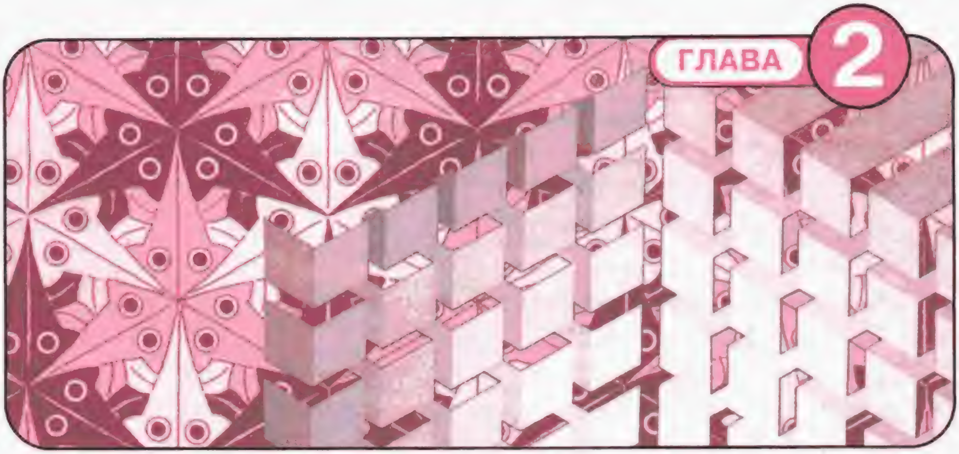
13. На сколько процентов площадь квадрата $AKLM$ меньше площади квадрата $ABCD$?
А. На 400%. **В.** На 75%.
Б. На 300%. **Г.** На 25%.

14. Издательство выпустило 10 наименований книг для взрослых и 40 наименований книг для детей. Сколько процентов всех книг составляют книги для взрослых?
А. 10%. **Б.** 15%. **В.** 20%. **Г.** 25%.

15. Цена акции за неделю понизилась на 10% и стала равной 3 р. 60 к. Сколько стоила акция неделю назад?
А. 4 р. **Б.** 3 р. 96 к. **В.** 3 р. 24 к. **Г.** 36 р.

16. Седьмой класс писал контрольную работу по геометрии. В результате выяснилось, что 14 человек решили все 3 задачи контрольной работы, 11 человек решили 2 задачи, 5 человек — 1 задачу и 3 человека не решили ни одной задачи. Определите среднее число задач, решенных одним учеником.

А. $1\frac{1}{3}$. **Б.** 2. **В.** $2\frac{1}{11}$. **Г.** 3.



Прямая и обратная пропорциональность

2.1 Зависимости и формулы

Занимаясь математикой, вы узнали много формул, описывающих зависимости между различными величинами, и научились с их помощью вычислять значения одних величин по значениям других.

Вы знаете формулу площади прямоугольника $S = ab$, которая выражает соотношение между площадью S и длинами сторон a и b. Практический смысл этой формулы состоит в том, что для нахождения площади прямоугольника достаточно измерить его стороны и перемножить получившиеся числа.

Формула пути равномерного движения $s = vt$ выражает зависимость расстояния s от скорости движения v и времени t. Это главное соотношение между расстоянием, скоростью и временем движения позволяет по любым двум из указанных величин найти третью с помощью вычислений.

Каждый человек в повседневной жизни фактически пользуется формулой стоимости покупки, умножая цену товара (т. е. стоимость одного килограмма, или одной пачки, или одного метра и т. п.) на количество купленного товара (число килограммов, пачек, метров и т. п.). Если стоимость покупки обозначить буквой C, цену товара — буквой c, а количество купленного товара — буквой m, то формула стоимости покупки будет выглядеть так: $C = cm$.

Много раз вы решали задачи, в которых шла речь о выполнении некоторой работы. Пусть, например, каменщик выкладывает стену из кирпичей. Объем выполненной им работы, а именно, число уложенных кирпичей, зависит от того, насколько быстро совершается эта работа, т. е. сколько кирпичей укладывает каменщик, например, за час. Эта величина, показывающая, какая работа выполняется в единицу времени, имеет специальное название — *производительность работы.* Для вычисления объема выполненной работы надо производительность умножить на время. Обозначим объем всей работы буквой P, производительность буквой p, а время работы буквой t. Получим формулу, связывающую эти величины: $P = pt$.

При вычислениях по формулам вместо букв можно подставлять разные числа. Например, в формуле $s = vt$ время и скорость могут меняться и в зависимости от этого будет меняться и расстояние. Такие изменяющиеся величины называют *переменными величинами*, а буквы в формуле, которыми они обозначены, — *переменными*.

Буквой в формуле не всегда обозначена переменная. Например, в известной вам формуле длины окружности $C = \pi d$ буквой π обозначено число, равное отношению длины окружности к диаметру, являющееся одним и тем же для любой окружности. Говорят, что π — это постоянная (или константа — от латинского *constantis*, означающего «постоянная»). А еще в не знакомой вам знаменитой формуле Альберта Эйнштейна $E = mc^2$, выражающей зависимость между массой тела и энергией, которой оно обладает, буква c — это константа, равная скорости света.

Каждая переменная в формуле связана с множеством значений, которые она может принимать. Так, в формуле $s = vt$ переменные могут принимать только положительные значения. Более того, эти значения находятся в ограниченном промежутке. Например, если этой формулой описывается движение пешехода, то значения скорости v не могут превосходить 5—6 км/ч. А в формуле $P = pt$, выражающей зависимость объема выполненной каменщиком работы от производительности и времени, переменные P и p могут принимать только натуральные значения.

При вычислениях по формулам необходимо следить за тем, чтобы единицы, в которых выражены входящие в них величины, были согласованы между собой. Только в этом случае формула может дать правильный результат. Так, если поезд движется со скоростью 108 км/ч, то за 10 с он пройдет вовсе не $108 \cdot 10 = 1080$ км, а 0,3 км. Действительно, чтобы получить правильный результат, надо время выразить в часах:

$$10\ \text{с} = \frac{1}{360}\ \text{ч},\ s = 108\ \text{км/ч} \cdot \frac{1}{360}\ \text{ч} = \frac{108\ \text{км} \cdot \text{ч}}{360\ \text{ч}} = 0{,}3\ \text{км}.$$

Обратите внимание на то, что в ходе вычислений мы обращались с единицами, в которых выражена величина, так же, как и с дробями.

А

144. а) Тетрадь стоит x рублей, а альбом стоит y рублей. Составьте формулу для вычисления стоимости покупки C, если куплено m тетрадей и n альбомов. Какие значения могут принимать переменные m и n?

б) Вода в бассейн наливается через две трубы. Через первую поступает a литров воды в минуту, а через вторую — b литров воды в минуту. Составьте формулу для определения количества воды в бассейне V через t минут после открытия кранов. Какие значения могут принимать переменные a и b?

145. а) В России каждый работающий человек платит со своего заработка подоходный налог, составляющий 13%. Введите переменные и запишите формулу зависимости размера подоходного налога от величины заработка.

б) Сотрудники некоторого предприятия отчисляют в пенсионный фонд 4% от заработной платы. Введите переменные и запишите формулу зависимости размера пенсионных отчислений от величины заработной платы.

146. а) Объем тетраэдра — треугольной пирамиды, все ребра которой равны (рис. 2.1), можно вычислить по приближенной формуле $V \approx \frac{7a^3}{60}$, где a — длина ребра. Найдите объем тетраэдра, если $a = 6$ см; $a = 12$ см.

б) Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.2) вычисляется по формуле $S = 2(ab + ac + bc)$, где a, b и c — измерения параллелепипеда. Найдите площадь поверхности, если $a = 5$ см, $b = 7$ см, $c = 9$ см.

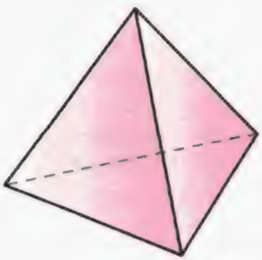


Рис. 2.1

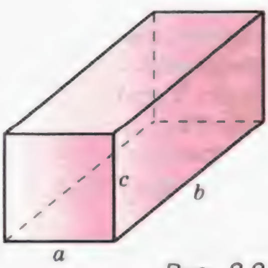


Рис. 2.2

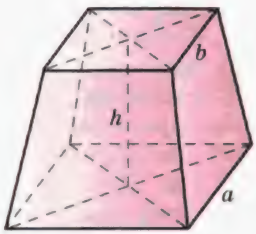


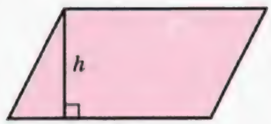
Рис. 2.3

в) Объем усеченной пирамиды с квадратными основаниями (рис. 2.3) вычисляется по формуле $V = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + ab)$, где h — высота усеченной пирамиды. Найдите объем, если $h = 15$ см, $a = 20$ см, $b = 10$ см.

147. Если автомобиль едет со скоростью v км/ч, то его тормозной путь в метрах можно приближенно вычислить по формуле $s = 0{,}2v + 0{,}005v^2$ (тормозной путь автомобиля — это расстояние, которое он проезжает после того, как водитель нажал на тормоз).

а) Вычислите тормозной путь автомобиля, который едет со скоростью 60 км/ч; 100 км/ч.

б) Во сколько раз больше тормозной путь автомобиля при скорости 80 км/ч, чем при скорости 40 км/ч?

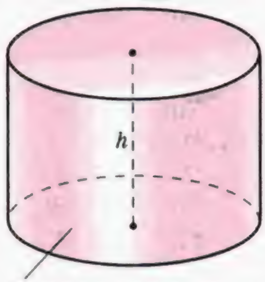


$S = ah$

Рис. 2.4

148. Формула F = 1,8C + 32 выражает зависимость между температурой в градусах Фаренгейта (°F) и температурой в градусах Цельсия (°C). В России нормальной температурой тела человека считается 36,6 °C, а в странах, использующих шкалу Фаренгейта, — 98,8 °F. Где в качестве нормальной принята более высокая температура тела человека?

$V = Sh$



S – площадь основания

Рис. 2.5

149. Решите задачу, пользуясь формулой $s = vt$.

а) Скорость автомобиля, едущего по шоссе, 80 км/ч. За сколько секунд он проезжает расстояние между соседними километровыми столбами?

б) Расстояние между соседними километровыми столбами электропоезд проходит за 1 мин 12 с. Найдите скорость электропоезда, выразив ее в километрах в час.

150. Выразите высоту h из формулы:

а) площади параллелограмма $S = ah$ (рис. 2.4);

б) объема цилиндра $V = Sh$ (рис. 2.5).

$S = \frac{ah}{2}$

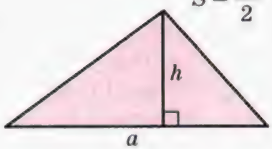


Рис. 2.6

151. а) Из формулы площади треугольника $S = \frac{ah}{2}$ (рис. 2.6) выразите h и a.

б) Из формулы объема пирамиды $V = \frac{Sh}{3}$ (рис. 2.7) выразите h и S.

152. Из физической формулы выразите переменную m:

а) $\rho = \frac{m}{V}$;   в) $Q = cmt$;

б) $a = \frac{F}{m}$;   г) $E = \frac{mv^2}{2}$.

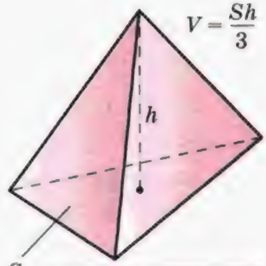


Рис. 2.7

Б

153. Наблюдатель во время грозы считает, сколько секунд (t) прошло между вспышкой молнии и раскатом грома, и определяет, на каком расстоянии (S) он находится от эпицентра грозы. Составьте формулу для вычисления этого расстояния в километрах, если известно, что звук распространяется в воздухе со скоростью 330 м/с.

154. За время t человек, длина шага которого равна l, сделал n шагов. Составьте формулу, выражающую зависимость его скорости v от переменных t, l и n. Найдите по этой формуле скорость пешехода, выразив ее в метрах в минуту и в километрах в час, если длина его шага 60 см и за 5 мин он сделал 700 шагов.

155. Олег живет в многоэтажном доме. Он сосчитал число ступенек, ведущих от входа в подъезд к площадкам каждого из первых пяти этажей, и составил таблицу:

Этаж	1	2	3	4	5
Число ступенек	5	21	37	53	69

Если бы Олег продолжил заполнение таблицы, какое число он записал бы в клетке, соответствующей 6-му этажу? 10-му этажу? Составьте формулу, выражающую зависимость числа ступенек N от этажа n. Какие значения могут принимать переменные n и N? Найдите N, если $n = 15$.

156. Электропоезд проходит расстояние между соседними километровыми столбами за 1,5 мин. На сколько километров в час надо увеличить скорость, чтобы сократить это время на полминуты?

157. Легкоатлеты в процессе тренировки вырабатывают скоростную выносливость, увеличивая скорость во время бега. Например, бегун на дистанции 1500 м пробежал первые 250 м за 50 с, следующие 500 м — за 95 с и оставшиеся 750 м — за 140 с. Какую скорость (в км/ч) развил этот бегун на каждом из участков дистанции? (Ответы округляйте до десятых. Воспользуйтесь калькулятором.)

158. Процент p уценки вещи может быть вычислен по формуле $p = 100\left(1 - \frac{r}{s}\right)$, где s — старая цена, а r — новая цена. Вычислите, на сколько процентов уценили книгу, если ее цену снизили с 80 р. до 75 р. 50 к. (Ответ округлите до десятых.)

159. Размер обуви зависит от длины стопы. Существуют формулы, выражающие эту зависимость для мужских и женских размеров, принятых в некоторых англоговорящих странах: для мужской обуви $s = 3l - 26$ и для женской обуви $s = 3l - 22$, где s — размер обуви, l — длина стопы в дюймах. Какой английский размер подходит Наташе, если длина стопы у нее равна 30 см, и Игорю, если у него длина стопы 35 см? (1 дюйм $\approx$ $\approx$ 2,5 см.)

160. В нашей стране и в США для приближенной прикидки нормального веса взрослого человека пользуются разными формулами:

в России: $P = H - 100$, где P — вес в килограммах, H — рост в сантиметрах;

в США: $W = \frac{11}{2}H - 220$, где W — вес в фунтах, H — рост в дюймах.

Определите, какой вес считается нормальным в России и в США для человека ростом 180 см. Сравните полученные результаты. (1 фунт $\approx$ 0,454 кг, 1 дюйм $\approx$ 2,54 см. Воспользуйтесь калькулятором.)

2.2 Прямая пропорциональность. Обратная пропорциональность

В предыдущем пункте мы рассмотрели формулы площади прямоугольника $S = ab$, пути $s = vt$, стоимости $C = cm$, работы $P = pt$. Хотя эти формулы связывают разные величины и записываются разными буквами, они очень похожи: в левой части записана одна переменная, в правой — произведение двух других. Чтобы понять особенности зависимостей, описываемых подобными формулами, рассмотрим одну из них, а именно формулу пути $s = vt$.

Пусть движение совершается с постоянной скоростью, равной, например, 4 км/ч. Тогда пройденный путь s будет зависеть только от времени движения t. В таблице указаны время движения и соответствующее этому времени расстояние:

$v = 4$ км/ч	
t, ч	s, км
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20
6	24

Во сколько раз увеличивается время движения t, во столько же раз увеличивается пройденное расстояние s. Например, если время увеличивается в 2 раза, то и расстояние также увеличивается в 2 раза. Говорят, что при постоянной скорости расстояние **прямо пропорционально** времени движения.

Определение

Две величины называют прямо пропорциональными, если при увеличении одной из них в несколько раз другая увеличивается во столько же раз.

Вместо слов «прямо пропорциональные величины» можно говорить короче: «пропорциональные величины».

Итак, если движение равномерное, расстояние пропорционально времени движения. Очевидно также, что при постоянном времени расстояние пропорционально скорости движения: если скорость увеличить, например, в 3 раза, то за такое же время будет проделан путь, в 3 раза больший.

Точно так же стоимость товара при постоянной цене пропорциональна его количеству; стоимость товара при одном и том же количестве пропорциональна его цене.

Вообще любая формула, похожая на формулу $s = vt$, дает нам два случая прямо пропорциональных величин. Все такие формулы могут быть представлены в виде $y = kx$, где буквами x и y обозначены переменные величины, а буквой k — та величина, которую мы считаем постоянной. Формулу $y = kx$ называют **формулой прямой пропорциональности**, а число k — **коэффициентом пропорциональности**.

Формулу прямой пропорциональности часто записывают в виде $\frac{y}{x} = k$. Этим равенством выражается важное свойство прямой пропорциональности: *если две величины прямо пропорциональны, то отношение их соответственных значений равно одному и тому же числу — коэффициенту пропорциональности.*

Обратимся еще раз к формуле $s = vt$. Пусть теперь постоянным будет пройденное расстояние; предположим, что оно равно 60 км. Тогда время, которое требуется, чтобы пройти это расстояние, зависит от скорости движения.

Выразим из формулы $s = vt$ время t и подставим $s = 60$; получим $t = \frac{60}{v}$. Найдем несколько пар соответственных значений v и t:

	$s = 60$ км		
	v, км/ч	t, ч	
	10	6	
$2\cdot$	12	5	$:2$
	15	4	
	20	3	
	30	2	
	60	1	

Во сколько раз увеличивается скорость v, во столько же раз уменьшается затрачиваемое время t. Например, если скорость увеличивается в 2 раза, то время уменьшается в 2 раза. Говорят, что при постоянном расстоянии время движения **обратно пропорционально** скорости движения. Можно сказать также, что скорость движения обратно пропорциональна времени движения.

Определение

Две величины называют обратно пропорциональными, если при увеличении одной из них в несколько раз другая уменьшается во столько же раз.

Например, при постоянной стоимости количество купленного товара обратно пропорционально его цене; при постоянном объеме работы время работы обратно пропорционально производительности.

Вообще если в формулах, подобных формуле $s = vt$, произведение постоянно, то две переменные величины связаны обратно пропорциональной зависимостью. В общем случае обратно пропорциональная зависимость может быть описана формулой $xy = k$, где x и

y — переменные, k — постоянная. Ее называют **формулой обратной пропорциональности**. Эта формула выражает важное свойство обратно пропорциональной зависимости: *если две величины обратно пропорциональны, то произведение их соответственных значений равно одному и тому же числу.*

Заметим, что формулу обратной пропорциональности принято записывать и в другом виде: $y = \frac{k}{x}$.

A

161. Вода поступает в бассейн через трубу с постоянной скоростью $p = 25$ л/мин. Пользуясь формулой $V = pt$, где V — объем воды в бассейне, t — время работы трубы, заполните таблицу:

t, мин	10	20	30	40	50	60
V, л						

Объясните, почему зависимость объема воды в бассейне от времени работы трубы при постоянной скорости поступления воды является прямой пропорциональностью. Чему равно отношение объема воды ко времени ее поступления?

162. Мотоциклист за некоторое время проехал расстояние, равное 30 км.

а) Какое расстояние проедет за это же время автомобиль, если его скорость в 2 раза больше? в 3 раза больше?

б) Какое расстояние проедет за это же время велосипедист, если его скорость в 2 раза меньше? в 3 раза меньше?

163. С помощью электромотора за 7 с можно накачать в бак 20 л воды.

а) За какое время можно наполнить бак, вмещающий 200 л воды? 120 л воды?

б) Сколько воды можно накачать в бак за 14 с? за 35 с?

164. Среди зависимостей, заданных формулой, определите те, которые являются прямой пропорциональностью, и объясните смысл коэффициента пропорциональности:

а) $C = 5t$, где C — стоимость междугороднего телефонного разговора (в р.), t — время разговора (в мин);

б) $N = 30n + 20$, где N — стоимость проката велосипеда, n — число дней, на которые был взят велосипед;

в) $C = \pi d$, где C — длина окружности, d — диаметр окружности;

г) $S = \pi r^2$, где S — площадь круга, r — радиус круга.

165. На 200 р. надо купить яблок одного сорта. Пользуясь формулой $m = \frac{C}{c}$, где C — стоимость покупки, c — цена одного килограмма яблок, m — масса купленных яблок, заполните таблицу:

c, р.	50	40	25	20	10
m, кг					

а) Объясните, почему зависимость массы купленных яблок m от их цены c является обратной пропорциональностью. Чему равно произведение цены яблок на их массу?

б) В какой зависимости находится цена яблок c от массы купленных яблок m при постоянной стоимости покупки?

166. Велосипедист проехал расстояние от станции до турбазы за 30 мин.

а) За какое время пройдет это же расстояние турист, скорость которого в 3 раза меньше скорости велосипедиста?

б) За какое время проедет это же расстояние мотоциклист, скорость которого в 5 раз больше скорости велосипедиста?

167. Шесть насосов выкачивают всю воду из водоема за 10 ч.

а) Сколько надо таких же насосов, чтобы выкачать воду из этого водоема за 5 ч? за 15 ч?

б) За какое время выкачают всю воду из этого водоема 3 таких же насоса? 9 таких же насосов?

168. а) Заготовленного запаса кормов хватит двум кроликам на 120 дней. На сколько дней такого же запаса кормов хватит 10 кроликам? 12 кроликам?

б) Три трактора могут вспахать поле за 18 ч. Сколько потребуется тракторов, чтобы вспахать это поле за 9 ч? за 27 ч?

169. Среди зависимостей, заданных формулой, определите те, которые являются обратной пропорциональностью, найдите произведение соответственных значений переменных и объясните смысл этого произведения:

а) $h = \frac{60}{a^2}$, где a — сторона квадрата, лежащего в основании параллелепипеда, h — высота параллелепипеда;

б) $a = \frac{12}{h}$, где h — ширина прямоугольника, a — его длина;

в) $n = \frac{100}{m}$, где m — грузоподъемность машины, n — число машин, необходимых для перевозки груза;

г) $n = \frac{M}{12}$, где M — масса груза, который необходимо перевезти, n — число машин, необходимых для перевозки груза.

170. Летний салат на 6 порций включает: 300 г помидоров, 250 г молодого картофеля; 200 г огурцов, 3 яйца, 120 г зеленого лука, 50 г укропа, 100 г сметаны, 50 г майонеза.
Подсчитайте расход продуктов для 3 порций салата; для 12 порций салата.

171. Некоторое количество чая надо развесить в одинаковые упаковки. Установите зависимость между массой упаковки и количеством упаковок и заполните таблицу:

а)

Масса упаковки, г	Количество упаковок
60	80
240	...
30	...
300	...

б)

Масса упаковки, г	Количество упаковок
150	30
...	90
...	180
...	15

172. На заработанные в каникулы деньги Виктор может купить 6 одинаковых по цене компакт-дисков с любимыми фильмами.
а) Сколько компакт-дисков он мог бы купить на эти деньги, если бы их цена была в 1,5 раза меньше? в 2 раза больше?
б) Сколько компакт-дисков купил Николай, если он заработал в 2 раза больше денег, чем Виктор, и купил диски по цене, в 1,5 раза большей?

173. За 12 с участник школьных соревнований пробежал 60 м.
а) Если он будет бежать с той же скоростью, то за сколько секунд он пробежит 40 м? 100 м?
б) За какое время пробежит 200 м спортсмен, скорость которого в 2 раза больше?

174. Задайте формулой указанную зависимость и определите, прямой или обратной пропорциональностью она является:
а) зависимость числа m одинаковых учебников, размещаемых на полке длиной 90 см, от толщины учебника l (в см);
б) зависимость израсходованного бензина V (в л) от пройденного автомобилем пути s (в км) при расходе 0,08 л бензина на 1 км пути;
в) зависимость времени t (в мин), за которое на принтере можно распечатать 200 страниц, от скорости печати принтера v (в с./мин);
г) зависимость стоимости Z (в р.) рулона ткани от длины l (в м) этого рулона при цене одного метра 30 р.

175. Определите, является прямой или обратной пропорциональностью зависимость:

а) периметра квадрата от длины его стороны;

б) площади квадрата от длины его стороны;

в) величины одного из смежных углов от величины другого;

г) длины одной из сторон прямоугольника данной площади от длины другой его стороны.

Б

176. а) Четыре машинистки, работающие с одинаковой производительностью, за 3 дня напечатали 222 страницы. Сколько страниц могут напечатать две из этих машинисток за 12 дней?

б) Из 180 г шерсти можно связать шарф шириной 12 см и длиной 2 м. Сколько шерсти потребуется на шарф шириной 36 см и длиной 1 м?

177. а) На облицовку плиткой подъезда в строящемся доме ушло 18 дней. За сколько дней можно было бы выполнить эту же работу, если повысить производительность труда на 20%?

б) Отчет группы исследователей был распечатан на принтере за 30 мин. За какое время можно распечатать этот отчет на принтере, производительность которого на 50% меньше?

178. После специального ухода за кустами садовод с 6 кустов смородины получил такой же урожай, как прежде с 8 кустов. На сколько процентов повысилась урожайность кустов? (Ответ округлите до единиц.)

179. Пряники стали продавать в новой упаковке, при этом масса пряников была увеличена на 25% по сравнению с массой в старой упаковке. На сколько процентов подешевели пряники, если стоимость упаковки осталась прежней?

180. а) В связи с увеличением числа учащихся школьная столовая стала закупать в 1,2 раза больше муки для пирожков. Как изменились расходы столовой на муку, если она подорожала с 20 до 30 р. за килограмм?

б) Из-за неурожая какао-бобов, используемых в производстве шоколада, страна-поставщик увеличила их цену в 1,5 раза. В связи с этим кондитерская фабрика «Шоколад» вместо 20 т какао-бобов в день стала перерабатывать 16 т. Как изменились ежедневные затраты фабрики на закупку какао-бобов?

в) Стоимость минуты телефонного разговора по мобильной связи была снижена на 20%. Как при этом изменятся расходы Николая на телефон, если он сократит время разговоров в 2 раза?

2.3 Пропорции. Решение задач с помощью пропорций

Пешеход, который идет с постоянной скоростью, за 10 мин прошел 750 м, а за 20 мин — 1500 м. Очевидно, что отношения $\frac{750}{10}$ и $\frac{1500}{20}$ равны, так как они выражают одну и ту же величину — скорость движения пешехода в метрах в минуту, поэтому можно записать равенство $\frac{750}{10} = \frac{1500}{20}$. Такие равенства называют **пропорциями**.

Определение

Если отношение $\frac{a}{b}$ равно отношению $\frac{c}{d}$, то равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ называют пропорцией.

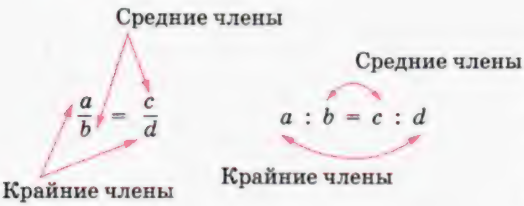


Рис. 2.8

Читают пропорцию по-разному. Помимо дословного перевода с буквенного языка: «отношение a к b равно отношению c к d», можно говорить иначе: «a так относится к b, как c относится к d». Числа, образующие пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, имеют специальные названия: a и d называют *крайними членами*, а b и c — *средними членами*. Происхождение этих терминов станет совершенно понятным, если записать пропорцию в строчку: $a : b = c : d$ (рис. 2.8).

А как узнать, является ли равенство вида $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ пропорцией? Например, является ли пропорцией равенство $\frac{0,2}{0,35} = \frac{8}{14}$? Это можно сделать, вычислив каждое из отношений, а можно воспользоваться известным правилом сравнения дробей. Воспользовавшись вторым способом, получим, что $0,2 \cdot 14 = 8 \cdot 0,35$, т. е. наше равенство — пропорция.

Любая пропорция обладает следующим свойством:

произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов.

Сформулированное утверждение называют **основным свойством пропорции**. С помощью букв его можно записать так:

$$\textbf{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \textbf{ то } ad = bc.$$

Убедимся в справедливости основного свойства. Для этого умножим каждое из равных отношений $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ на bd:

$$\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{abd}{b} = ad, \quad \frac{c}{d} \cdot bd = \frac{cbd}{d} = bc.$$

Так как при умножении равных чисел на одно и то же число получаются равные числа, то $ad = bc$.

С помощью основного свойства пропорции любой ее член можно выразить через три других. Это позволяет по трем известным членам пропорции находить неизвестный.

■ Пример 1. Найдем неизвестный член пропорции $\frac{28}{7} = \frac{56}{x}$.

По основному свойству пропорции имеем

$$28x = 7 \cdot 56.$$

Отсюда легко найти неизвестный множитель x:

$$x = \frac{7 \cdot 56}{28} = 14.$$

Задачи, в которых речь идет о прямо пропорциональных или обратно пропорциональных величинах, удобно решать с помощью пропорций.

■ Пример 2. На 6 одинаковых костюмов потребовалось 22 м ткани. Сколько ткани нужно для пошива 15 таких же костюмов?

Обозначим через x количество ткани (в м), которое требуется для пошива 15 костюмов, и запишем кратко условие задачи:

6 кост. — 22 м,
15 кост. — x м.

Количество ткани прямо пропорционально числу костюмов: во сколько раз увеличивается число костюмов, во столько же раз увеличивается и расход ткани. Поэтому отношения $\frac{15}{6}$ и $\frac{x}{22}$ равны. Получаем пропорцию $\frac{15}{6} = \frac{x}{22}$.

Из этой пропорции находим неизвестное число x:

$$x = \frac{15 \cdot 22}{6} = 55.$$

Таким образом, для пошива 15 костюмов требуется 55 м ткани.

Решим эту же задачу, составив другую пропорцию. Возьмем отношения $\frac{22}{6}$ и $\frac{x}{15}$. Каждое из них показывает, сколько ткани идет на один костюм, следовательно, эти отношения равны. Имеем пропорцию $\frac{22}{6} = \frac{x}{15}$. Отсюда находим, что $x = 55$.

■ Пример 3. Чай расфасовали в 30 пачек по 150 г в каждой. Сколько пачек получится, если это же количество чая фасовать в пачки по 250 г?

Обозначим через x количество пачек чая по 250 г и кратко запишем условие задачи:

150 г — 30 пачек,
250 г — x пачек.

Количество пачек чая обратно пропорционально массе одной пачки: во сколько раз увеличится масса пачки, во столько же раз уменьшится количество пачек. Теперь надо составить равные отношения. Здесь важно не ошибиться: отношение $\frac{250}{150}$ равно не отношению $\frac{x}{30}$, а обратному отношению $\frac{30}{x}$. Получаем пропорцию

$$\frac{250}{150} = \frac{30}{x}.$$

Из пропорции находим x:

$$x = \frac{150 \cdot 30}{250} = 18.$$

Итак, если фасовать чай в пачки по 250 г, то получится 18 пачек.

Решим задачу другим способом, который вы, возможно, посчитаете более простым.

В пачки по 150 г и по 250 г фасовали одно и то же количество чая, поэтому произведения $150 \cdot 30$ и $250 \cdot x$ равны:

$$150 \cdot 30 = 250 \cdot x.$$

Отсюда легко найти неизвестный множитель x.

А

181. Запишите в виде пропорции:

а) 18 так относится к 6, как 15 относится к 5;
б) отношение 100 к 30 равно отношению 40 к 12;
в) 70 во столько раз больше 50, во сколько раз 14 больше 10;
г) 5 составляет такую же часть от 15, какую 6 составляет от 18.

182. Проверьте двумя способами, является ли пропорцией следующее равенство:

а) $\frac{14}{70}=\frac{25}{125}$; б) $42:3=26:2$; в) $\frac{7,5}{15}=\frac{0,6}{1,2}$; г) $\frac{2}{3}:\frac{1}{2}=4:3$.

183. Найдите неизвестный член пропорции:

а) $\frac{x}{10}=\frac{4}{5}$; в) $\frac{0,4}{b}=\frac{2}{7}$; д) $3:y=2:5$; ж) $x:1,4=3:0,7$;

б) $\frac{6}{a}=\frac{3}{4}$; г) $\frac{3}{8}=\frac{y}{3,2}$; е) $6:7=9:c$; з) $9:0,8=a:1,6$.

184. Из пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ выразите число a; число b. Сформулируйте правило нахождения неизвестного крайнего члена пропорции; неизвестного среднего члена пропорции.

185. Обозначьте неизвестную величину буквой и составьте разные пропорции по условию задачи:

а) Таня занимается рассылкой объявлений. Она запечатывает 100 конвертов за 16 мин. Сколько конвертов запечатает она за 40 мин, если будет работать с такой же скоростью?

б) Ольга может за 30 с набрать на компьютере 160 знаков. Сколько знаков она наберет за 5 мин, если будет работать с той же скоростью?

Решите задачу **(186—191)**.

186. а) За 2,5 ч выпало 1,5 мм осадков. Сколько осадков выпало бы за 6 ч, если бы дождь шел с такой же силой?

б) За 2,5 мин на принтере распечатали 15 страниц. За какое время можно распечатать на этом принтере 100 страниц?

187. Масштаб карты 1 : 5 000 000.

а) Расстояние между Москвой и Курском на карте равно 9 см. Чему равно это расстояние в действительности?

б) Расстояние между Москвой и Ригой 900 км. Чему равно это расстояние на карте?

188. В любой окружности отношение длины окружности к ее диаметру одно и то же и приближенно равно $\frac{22}{7}$.

а) Определите длину окружности, диаметр которой равен 3 см.

б) При каком диаметре длина окружности равна 10 см?

(Ответы округляйте до десятых.)

189. а) Для 4 порций приправы требуется $\frac{1}{3}$ чайной ложки соли, $\frac{1}{4}$ чайной ложки перца и $\frac{1}{2}$ чайной ложки гвоздики. Сколько соли, перца и гвоздики потребуется для 30 порций?

б) В соответствии с рецептом пирога на 4 яйца требуется 1,5 стакана сахарного песка и $\frac{2}{3}$ стакана муки. Сколько сахарного песка и муки потребуется, если тесто готовится из 9 яиц?

190. а) Если в стакан насыпать 8 столовых ложек сахара, то заполнится $\frac{2}{3}$ стакана. Хватит ли 11 столовых ложек сахара, чтобы наполнить стакан?
б) Автомобиль проехал 280 км, затратив 21 л бензина. Хватит ли бака бензина, вмещающего 40 л, чтобы проехать 500 км?

191. (*Задание с выбором ответа.*) Если ехать на автомобиле со скоростью 65 км/ч, то от одного поселка до другого можно проехать за 20 мин. Велосипедист проехал этот же путь за 2 ч. Найдите скорость, с которой ехал велосипедист.
Какая пропорция соответствует условию задачи, если x — это скорость велосипедиста (в км/ч)?

А. $65 : x = \frac{1}{3} : 2$. **Б.** $x : 65 = 2 : \frac{1}{3}$. **В.** $65 : x = 2 : 20$. **Г.** $65 : x = 2 : \frac{1}{3}$.

Б

192. Составьте различные пропорции, используя следующие произведения:
а) $4 \cdot 8 = 2 \cdot 16$;
б) $25 \cdot 3 = 15 \cdot 5$;
в) $6 \cdot 9 = 3 \cdot 18$;
г) $4{,}8 \cdot 0{,}4 = 1{,}6 \cdot 1{,}2$.

193. Для каждой тройки чисел найдите четвертое число так, чтобы из этих четырех чисел можно было составить пропорцию:
а) 20, 5, 7; б) 10, 16, 3.
Сколько таких чисел вы нашли в каждом случае?

194. Найдите неизвестное число x, если:
а) $\frac{2x}{9} = \frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{5} = \frac{2}{5x}$; в) $\frac{1{,}5}{4x} = \frac{0{,}3}{10}$; г) $\frac{2}{x} = \frac{x}{8}$.

195. На рисунке 2.9 изображен чертеж фасада дома, выполненный в некотором масштабе. Длина фасада реального дома равна 12 м. Выполните на чертеже необходимые измерения и определите:
а) высоту стен реального дома;
б) высоту дома с учетом крыши.

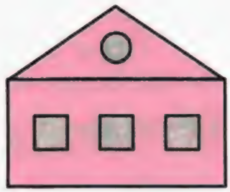


Рис. 2.9

196. На рисунке 2.10 фигура $A_1B_1C_1D_1E_1$ является копией фигуры $ABCDE$, полученной с

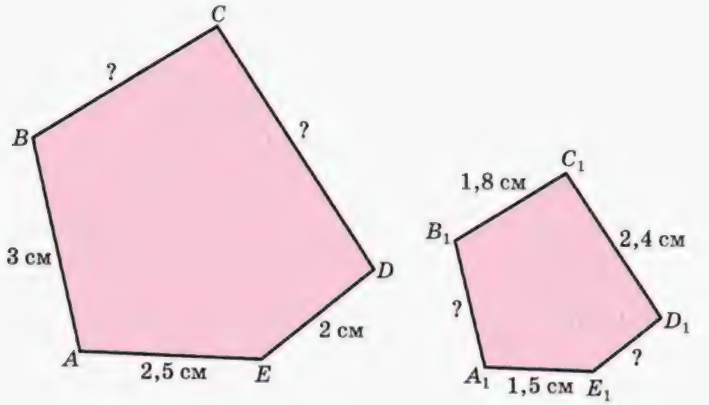


Рис. 2.10

помощью копировальной машины, которая уменьшает все размеры в одно и то же число раз.

а) Найдите неизвестные длины сторон.

б) Дополните равенства так, чтобы получились пропорции:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AE}{...}, \quad \frac{AB}{BC} = \frac{...}{B_1C_1}, \quad \frac{...}{CD} = \frac{D_1E_1}{...}.$$

в) Найдите отношение периметров этих фигур.

197. а) На участке железнодорожного пути старые 8-метровые рельсы меняют на новые 12-метровые. Снято 180 старых рельсов. На сколько меньше потребуется новых рельсов, чтобы заменить старые?

б) Двигаясь со скоростью 50 км/ч, электропоезд прошел перегон за 12 мин. На сколько надо увеличить скорость, чтобы сократить время прохождения этого перегона на 2 мин?

198. Чтобы связать шарф размером 20×100 см, потребуется 125 г шерсти. Сколько такой же шерсти нужно, чтобы связать шарф размером 12×80 см? 24×120 см?

199. Проехав 40% всего пути за 2,4 ч, водитель автомобиля сделал остановку. Следующую остановку он планирует сделать в пункте, после которого ему останется проехать четверть всего пути. Через какое время он сделает вторую остановку, если будет ехать с той же скоростью?

200. а) Девять рабочих, работая с одинаковой производительностью, могут выполнить работу за 10 ч. Сколько еще нужно пригласить рабочих, чтобы эта работа была выполнена за 6 ч?

б) Через две трубы вода из бассейна выливается за 3 ч. Сколько еще надо подключить труб, чтобы вода вылилась за 2 ч?

201. а) Одна машинистка может перепечатать рукопись за 15 ч, а другая — эту же рукопись за 25 ч. Они вместе отпечатали рукопись, одновременно начав и закончив работу. Первая отпечатала 150 страниц. Сколько страниц отпечатала вторая машинистка и сколько страниц в рукописи?

б) Одно и то же расстояние один пешеход проходит за 2 ч, а другой — за 3 ч. Они одновременно вышли навстречу друг другу, первый из пункта A, второй из пункта B, и встретились в 3,6 км от пункта A. Чему равно расстояние между пунктами?

202. (*Задача-исследование.*)

а) Дана пропорция $16:10=24:15$. Убедитесь, что вы вновь получите пропорцию, если:
поменяете местами крайние члены;
поменяете местами средние члены;
замените каждое отношение обратным.

б) Используя пропорцию $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, запишите три новые пропорции. (Убедитесь в том, что полученные равенства действительно являются пропорциями.) Сформулируйте соответствующие свойства пропорции.

в) Чему равно отношение a к b, если известно, что

$$a : 1{,}2 = b : 1{,}5; \quad 0{,}9 : b = 2{,}7 : a?$$

2.4 Пропорциональное деление

■ Задача 1. Три фирмы вложили в некоторый проект соответственно 6, 4 и 2 млн р. и получили 24 млн р. прибыли. Как они должны разделить эту прибыль?

Обычно считается, что распределение прибыли должно соответствовать долям средств, внесенных в проект его участниками. Деньги, вложенные первой и второй фирмами, относятся как 6 к 4, а второй и третьей — как 4 к 2. В таких случаях вместо двух отношений $6:4$ и $4:2$ пишут одно «длинное» отношение $6:4:2$ и говорят: «как шесть к четырем, к двум». Именно в таком отношении $6:4:2$ должна быть распределена полученная прибыль.

Наши рассуждения привели нас к хорошо знакомой задаче на части. Всего имеется $6+4+2=12$ частей, поэтому на каждую часть приходится $24:12=2$ млн р. Следовательно, первая фирма должна получить $2\cdot6=12$ млн р., вторая — $2\cdot4=8$ млн р. и третья — $2\cdot2=4$ млн р.

Заметим, что рассмотренное в задаче отношение $6:4:2$ можно было бы *сократить*, т. е. разделить каждое из входящих в него чисел на их общий делитель — число 2. Тогда мы получили бы более

простое отношение 3 : 2 : 1. В этом случае было бы всего 6 частей, однако каждая часть составляла бы 4 млн р.

Система распределения прибыли, описанная в этой задаче, называется *пропорциональной*. Слово «пропорциональный» происходит от латинского *pro-portione*, означающего «соответственно порциям», «согласно долям», «по количеству». Можно сказать, что прибыль разделили пропорционально суммам, вложенным в проект.

■ Задача 2. Участок земли разделили между четырьмя фермерами пропорционально количеству членов их семей. В семье первого фермера 4 человека, в семье второго — 6 человек, третьего — 7 человек, и в семье четвертого фермера — 3 человека. Какой процент площади участка получил каждый фермер?

Площадь всего участка составляет 100%, и эти 100% нужно разделить пропорционально числам 4, 6, 7 и 3, т. е. в отношении 4 : 6 : 7 : 3. Это тоже задача на части. Всего мы имеем 20 частей, поэтому на каждую часть приходится 5%. Значит, фермеры получили соответственно 20%, 30%, 35% и 15% площади участка.

А

203. Упростите отношение, сократив его:

а) 18 : 3 : 9; б) 10 : 15 : 15; в) 8 : 4 : 2 : 6; г) 12 : 42 : 30 : 24.

204. Отношение, членами которого являются дробные числа, можно заменить отношением целых чисел, если умножить все его члены на одно и то же, не равное нулю число. Упростите отношение:

а) $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{4}$; б) $1\frac{1}{3} : 1\frac{1}{2} : 1$; в) 0,5 : 1 : 1,5; г) 4,5 : 2,7 : 1,8.

205. (*Задание с выбором ответа.*) Тест включает 30 задач: 6 задач по арифметике, 15 — по алгебре, остальные — по геометрии. В каком отношении находятся в тесте арифметические, алгебраические и геометрические задачи?

А. 6 : 9 : 15. **Б.** 2 : 3 : 5. **В.** 2 : 5 : 3. **Г.** 6 : 15 : 30.

206. а) Распределите 70 билетов между тремя классами пропорционально числам 2, 3 и 5.

б) Разделите число x на части, пропорциональные числам a, b, c.

207. Осенью учащиеся трех классов работали в теплицах: 5 класс — 28 ч, 6 класс — 42 ч, 7 класс — 56 ч. Тепличное хозяйство оплатило их работу в размере 4500 р. Как разделить эту сумму между тремя классами?

208. Из лекарственных трав — шалфея, ромашки и валерианы — составили сбор, взяв их в отношении 2 : 5 : 3. Какой процент этого сбора составляет каждая из трав?

209. Три цветовода решили выращивать цветы на продажу. В дело они вложили соответственно 2 тыс., 1,3 тыс. и 1,7 тыс. р. Какой процент прибыли получит каждый из них?

210. В выставке собак участвовали собаки больших, средних и мелких пород, число которых находилось в отношении 4 : 8 : 3. Сколько всего собак на выставке, если:
а) собак мелких пород всего 6;
б) собак больших и средних пород вместе 36;
в) собак средних пород на 20 больше, чем мелких.

211. Для подготовки викторины «Крупнейшие столицы мира» учащиеся составили вопросы по темам «Географическое положение», «Климат», «Экономика», «Культура», которые решили взять в отношении 4 : 2 : 1 : 5. Сколько всего вопросов будет в викторине, если включить:
а) x вопросов по географическому положению;
б) y вопросов по экономике и культуре?

Б

212. Всего имеется 350 г семян. Их надо насыпать в три пакета так, чтобы масса семян в первом пакете составила 50% массы семян во втором, а масса семян во втором пакете составила 50% массы семян в третьем. Сколько семян будет в каждом пакете?

213. Фермер купил три газонокосилки, заплатив за них 32 000 р. За каждую из них он дал продавцу одно и то же количество купюр, причем за первую газонокосилку он заплатил купюрами достоинством в 1000 р., за вторую — в 500 р., за третью — в 100 р. Сколько стоит каждая газонокосилка?

214. Фирмам A, B и C принадлежит 75% акций некоторого предприятия, которые распределены между ними в отношении 4 : 12 : 9. Остальными 350 000 акций владеют работники этого предприятия. Сколько акций имеет каждая из фирм?

215. Периметр треугольника ABC равен 15,5 см. Найдите длины сторон этого треугольника, если AB относится к BC как 3 к 5, а BC относится к AC как 2 к 3.

216. Призы на сумму 12 400 р. были присуждены трем призерам соревнования так, что сумма, полученная вторым, составила $\frac{2}{3}$ от суммы, полученной первым. В то же время сумма, полученная вторым, относится к сумме, полученной третьим, как $1\frac{1}{3} : \frac{4}{5}$. Сколько рублей получил каждый призер?

Задачи на «сложные» пропорции

(Для тех, кому интересно)

Задача. Бригада студентов из 16 человек за 20 дней собрала 180 т картофеля. Сколько картофеля уберет бригада из 12 человек за 28 дней, если будет работать с такой же производительностью?

Решение. Запишем кратко условие задачи:

16 человек — 20 дней — 180 т,
12 человек — 28 дней — x т.

Будем последовательно переходить от одного значения величины к другому, пока не получим нужный результат:

16 человек за 20 дней собрали 180 т;

1 человек за 20 дней соберет в 16 раз меньше, т. е. $\frac{180}{16}$ т;

12 человек за 20 дней соберут в 12 раз больше, т. е. $\frac{180 \cdot 12}{16}$ т;

12 человек за 1 день соберут в 20 раз меньше, т. е. $\frac{180 \cdot 12}{16 \cdot 20}$ т;

12 человек за 28 дней соберут в 28 раз больше, т. е. $\frac{180 \cdot 12 \cdot 28}{16 \cdot 20}$ т.

Теперь проведем вычисления: $\frac{180 \cdot 12 \cdot 28}{16 \cdot 20} = 189$ (т).

Ответ. 189 т.

Пользуясь этим приемом, решите следующие задачи.

217. В конноспортивной школе на 5 лошадей за 30 дней расходуется 1000 кг овса. На сколько дней хватит 200 кг овса для 10 лошадей при той же норме?

218. При строительстве здания 3 строителя за 8 ч выложили из кирпичей стену высотой 4 м. За какое время смогла бы выложить стену высотой 10 м бригада из 4 человек, если их производительность на 20% выше?

219. Для 15 человек, отправляющихся в экспедицию на 20 дней, заготовили 300 бутылок воды.

а) Сколько бутылок воды при той же норме надо добавить к уже заготовленным, если в экспедицию отправится 20 человек на 30 дней?

б) На сколько дней хватит 500 бутылок воды, если в экспедицию отправится 10 человек?

в) Сколько человек можно отправить в 10-дневную экспедицию, если заготовлено 200 бутылок воды?

220. Команда из 3 операторов, работая по 6 ч в день, за 4 дня набрала на компьютере 700 страниц рукописи. Оставшиеся 350 страниц требуется набрать за 2 дня, причем компьютерный зал будет предоставляться только на 2 ч в день. На сколько человек нужно увеличить команду, чтобы она смогла выполнить эту задачу?

ДЗ Дополнительные задания к главе 2

Пропорции. Решение задач

221. Найдите неизвестный член пропорции:

а) $\frac{x}{2{,}25} = \frac{2}{1{,}5}$; б) $\frac{4{,}5}{18} = \frac{x}{2{,}5}$; в) $\frac{1{,}75}{0{,}85} = \frac{2{,}4}{x}$; г) $\frac{0{,}23}{x} = \frac{6{,}9}{15}$.

222. Дано равенство $xy = zv$. Составьте четыре пропорции, членами которых являются те же числа x, y, z и v.

223. Известно, что $15x = 12y$. Найдите отношение x к y.

224. Известно, что 20% числа a равны 30% числа b. Найдите отношение a к b.

225. Решите задачу, составив пропорцию:

а) В библиотеке 8 тыс. книг. Книги для детей составляют 35% всех книг. Сколько в библиотеке книг для взрослых?

б) В первый день открытия библиотеки в нее записались 42 читателя, что составило 17,5% всех читателей библиотеки, записавшихся к концу месяца. Сколько читателей стало в библиотеке через месяц после ее открытия?

в) Из 300 читателей библиотеки 108 человек — школьники. Какой процент всех читателей составляют школьники?

Образец. В городе 72 тыс. жителей. Из них 18% — дети до десяти лет. Сколько детей до десяти лет живет в этом городе?

Решение. Примем все население города за 100% и запишем кратко условие задачи:

$$72\,000 — 100\%,$$
$$x — 18\%.$$

Составим пропорцию:

$$\frac{72\,000}{x} = \frac{100}{18}.$$

Найдем x: $x = \frac{72\,000 \cdot 18}{100} = 12\,960$.

Ответ. В городе 12 960 детей до десяти лет.

226. а) В строительстве бассейна используют белый и черный кафель в отношении $5:2$. Сколько надо белого кафеля, если требуется 450 плиток черного?

б) В сплаве, состоящем из золота и меди, масса золота относится к массе меди как $6:5$. Найдите массу золота в сплаве, содержащем 75 г меди.

227. Размеры участка земли прямоугольной формы 30 и 50 м. Начертите план этого участка в масштабе $1:500$. Укажите на плане возможное расположение ворот, если они будут установлены на длинной стороне участка на расстоянии 20 м от одного из углов и ширина их будет равна 3 м.

228. Плавательный бассейн наполнился водой за 90 мин до отметки 35 см. Сколько еще потребуется времени, чтобы он наполнился до отметки 140 см?

229. Бассейн при одновременном включении 4 кранов заполняется водой за $\frac{3}{4}$ ч. За какое время тот же бассейн заполняется водой при одновременном включении 6 таких же кранов?

230. Проехав 80 км, автомобиль истратил 5,6 л бензина. Какое расстояние может проехать автомобиль с полным баком, вмещающим 40 л бензина? (Ответ округлите до десятков.)

Пропорциональное деление

231. Число учащихся первых, вторых, третьих и четвертых классов в начальной школе пропорционально числам 8, 10, 9 и 9.

а) Найдите число всех учащихся начальной школы, если в третьих классах учится 63 ученика.

б) Найдите число учащихся в каждой параллели, если известно, что во вторых классах на 8 учеников больше, чем в третьих.

в) Найдите число учащихся вторых классов, если в первых и третьих вместе учится 102 ученика.

232. Сумма двух сторон треугольника — большей и меньшей — равна 4,5 дм, а его стороны пропорциональны числам 2, 4 и 5. Чему равен периметр этого треугольника?

233. В сплав входят медь, олово и сурьма в отношении $4:15:6$. Сколько процентов сплава составляет каждый металл? Какова масса сплава, если в нем меди меньше, чем олова, на 880 г?

234. Для первых классов приобрели 588 тетрадей. Сколько тетрадей получит каждый класс, если число учащихся 1А и 1Б классов находятся в отношении $3:4$, а число учащихся 1Б и 1В классов в отношении $8:7$?

235. Отрезок AB, длина которого 7 см (рис. 2.11), разделен точками K, M и P на 4 части в отношении $3:5:4:2$. На сколько сантиметров длина отрезка AP больше длины отрезка KB?

Рис. 2.11

Вопросы для повторения к главе 2

1. Какие величины называют прямо пропорциональными? Приведите примеры прямо пропорциональных величин. Запишите общую формулу прямо пропорциональной зависимости.
2. Сформулируйте свойство прямо пропорциональных величин. Для зависимости пути от времени движения, рассмотренной в объяснительном тексте п. 2.2, назовите переменные величины, постоянную величину. Чему равно отношение соответственных значений пропорциональных величин? Чему равен коэффициент пропорциональности?
3. Какие величины называют обратно пропорциональными? Приведите примеры обратно пропорциональных величин. Запишите общую формулу обратно пропорциональной зависимости.
4. Сформулируйте свойство обратно пропорциональных величин. Для зависимости времени движения от его скорости, рассмотренной в объяснительном тексте п. 2.2, назовите переменные величины, постоянную величину. Чему равно произведение соответственных значений обратно пропорциональных величин?
5. Дайте определение пропорции. Приведите пример пропорции и назовите ее крайние и средние члены.
6. Сформулируйте основное свойство пропорции. Как найти неизвестный член пропорции $\frac{a}{8} = \frac{5}{4}$?
7. Придумайте задачу на пропорциональное деление какой-либо величины.

Задания для самопроверки к главе 2

(Обязательные результаты обучения)

1. Расстояние между двумя городами 600 км. Автомобиль выехал из одного города в другой. Запишите формулу для вычисления расстояния s, которое ему осталось проехать через t ч, если он едет со скоростью v км/ч.

2. Используя формулу $F = \frac{9}{5}C + 32$, выражающую зависимость между температурой, измеряемой по шкале Фаренгейта (F) и по шкале Цельсия (C), выразите в градусах Фаренгейта температуру кипения воды 100 °C и температуру замерзания воды 0 °C.

3. Пешеход за некоторое время прошел 12 км. Какое расстояние проехал бы он за это же время на велосипеде, если его скорость была бы в 2,5 раза больше?

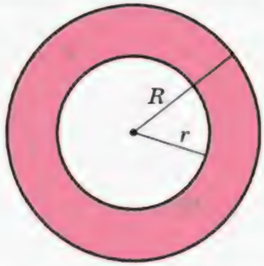
4. Автомобиль проехал расстояние между двумя пунктами за 2 ч. За какое время это же расстояние проедет автобус, если его скорость в 1,5 раза меньше?

5. Найдите неизвестный член пропорции $\frac{3}{8} = \frac{a}{2{,}4}$.

6. Из 15 т руды получено 3 т меди. Сколько тонн меди получится из 20 т этой руды?

7. Распределите 3 тыс. рублей пропорционально числам 4, 3 и 8.

Тест к главе 2



1. Площадь кольца S можно вычислить по формуле $S = \pi\,(R^2 - r^2)$. Найдите площадь кольца, если $R = 6$ см, $r = 4$ см ($\pi \approx 3{,}14$).

   Ответ. ______________

2. Клиент банка внес x рублей на вклад, по которому вложенная сумма увеличивается на 5% за год, и y рублей на вклад, по которому начисляется 8% годовых. Через год его доход по двум вкладам составил C рублей. Какая формула выражает зависимость C от x и y?

   А. $C = 0{,}13(x + y)$.
   Б. $C = 0{,}05x + 0{,}08y$.
   В. $C = 0{,}5x + 0{,}8y$.
   Г. $C = 5x + 8y$.

3. Из геометрической формулы $S = \frac{ah}{2}$ выразите переменную h.

   А. $h = \frac{S}{2a}$. **Б.** $h = \frac{a}{2S}$. **В.** $h = \frac{aS}{2}$. **Г.** $h = \frac{2S}{a}$.

4. Междугородний автобус проезжает 1 км по шоссе за 50 с. Найдите скорость автобуса в километрах в час.

   Ответ. ______________

5. Формула $P = pt$ связывает три величины: объем выполненной работы P, производительность p и время выполнения работы t. Какие из следующих утверждений являются верными?
I. Объем выполненной работы при постоянной производительности пропорционален времени работы.
II. Время работы при постоянном ее объеме пропорционально производительности.
III. Объем выполненной работы при постоянном времени работы пропорционален производительности.
А. Только I. **Б.** Только II. **В.** II и III. **Г.** I и III.

6. Автомобиль, двигаясь с постоянной скоростью, за определенное время проехал $\frac{1}{3}$ всего расстояния до пункта назначения. Какую часть этого расстояния можно было бы проехать за это же время со скоростью, в 1,2 раза большей?
Ответ. ________

7. Для школы купили 6 одинаковых компьютеров. Сколько компьютеров, стоимость которых в 1,5 раза меньше, можно было бы купить на эту же сумму?
А. 4. **Б.** 8. **В.** 9. **Г.** Для ответа не хватает данных.

8. Из каких отношений нельзя составить пропорцию?
А. $2:7$ и $11:33$. **В.** $0{,}1:7$ и $0{,}5:35$.
Б. $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$ и $2:\frac{1}{2}$. **Г.** $0{,}02:0{,}1$ и $2:10$.

9. Дана пропорция $5:a = 6:b$. Какое из следующих равенств пропорцией не является?
А. $a:b = 5:6$. **Б.** $b:a = 6:5$. **В.** $a:b = 6:5$. **Г.** $a:5 = b:6$.

10. Как можно найти неизвестный член пропорции $\frac{x}{1{,}2} = \frac{5}{8}$?
А. $x = \frac{8 \cdot 1{,}2}{5}$. **Б.** $x = \frac{1{,}2 \cdot 5}{8}$. **В.** $x = \frac{8 \cdot 5}{1{,}2}$. **Г.** $x = \frac{8}{1{,}2 \cdot 5}$.

11. Одна машинистка печатает страницу за 6 мин, а другая — за 10 мин. Первая за некоторое время напечатала 40 страниц. Сколько страниц за это же время напечатает вторая?
Установите, какая пропорция соответствует условию задачи (x — число страниц, которое напечатает вторая машинистка).
А. $\frac{6}{10} = \frac{x}{40}$. **Б.** $\frac{6}{10} = \frac{40}{x}$. **В.** $\frac{6}{40} = \frac{x}{10}$. **Г.** $\frac{6}{40} = \frac{10}{x}$.

12. Отрезок AB, длина которого равна 21 см, точками C и D разделен на три части в отношении $2:3:5$. Чему равна длина отрезка CB?

Ответ. ________

Введение в алгебру

3.1 Буквенная запись свойств действий над числами

Арифметика — наука о числах, основные ее задачи связаны с вычислением значений числовых выражений. Но для того чтобы говорить о свойствах арифметических действий, формулировать какие-то общие утверждения, которые составляют основу вычислительных приемов, уже нужны буквы.

С таким применением букв вы познакомились еще в начальной школе, когда изучали *основные свойства сложения и умножения чисел*. Напомним их:

1. *Переместительное свойство сложения*, которое утверждает, что два числа можно складывать в любом порядке. В буквенном виде это свойство записывается так: для любых a и b

$$\boldsymbol{a + b = b + a.}$$

2. *Сочетательное свойство сложения*, согласно которому при сложении трех чисел можно группировать как первые два слагаемых, так и последние два: для любых a, b и c

$$\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c).}$$

Так как расстановка скобок на результат не влияет, то эти суммы записывают также без скобок:

$$\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c.}$$

3. *Переместительное свойство умножения*: для любых a и b

$$\boldsymbol{ab = ba.}$$

4. *Сочетательное свойство умножения*: для любых a, b и c

$$(ab)c = a(bc) = abc.$$

5. *Распределительное свойство* — совместное свойство действий сложения и умножения: для любых a, b и c

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Есть много других свойств арифметических действий, которыми вы пользуетесь при вычислениях. Попробуем некоторые из них сформулировать и записать с помощью букв. Для этого рассмотрим два примера устных вычислений и в каждом случае постараемся понять, с помощью каких действий мы получаем нужный результат.

■ Пример 1. Чтобы вычесть из числа 68 число 35, можно сначала отнять от 68 число 30, а затем от получившегося результата число 5.

Запишем эти рассуждения с помощью цепочки равенств:

$$68 - 35 = \boxed{68 - (30 + 5) = 68 - 30 - 5} = 38 - 5 = 33.$$

Точно так же можно поступать и с другими числами:

$$97 - 51 = \boxed{97 - (50 + 1) = 97 - 50 - 1} = 47 - 1 = 46,$$
$$102 - 84 = \boxed{102 - (80 + 4) = 102 - 80 - 4} = 22 - 4 = 18.$$

Таким образом, независимо от того, какие конкретные числа берутся, мы пользуемся одним и тем же общим приемом: чтобы вычесть из некоторого числа сумму двух чисел, вычитаем из него первое слагаемое и из полученного результата вычитаем второе слагаемое.

С помощью букв наши действия могут быть записаны следующим образом:

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

Это буквенное равенство говорит о том, что любую разность вида $a - (b + c)$ можно заменить выражением $a - b - c$, не содержащим скобки.

■ Пример 2. Чтобы устно разделить число 327 на 3, можно рассуждать так: 327 — это сумма чисел 300 и 27; разделим на 3 отдельно каждое слагаемое — получим 100 и 9; сложив эти числа, найдем искомое частное — число 109.

Запишем ход наших рассуждений:

$$327 : 3 = (300 + 27) : 3 = 300 : 3 + 27 : 3 = 100 + 9 = 109.$$

Прием, с помощью которого мы выполнили деление, состоит в следующем: чтобы разделить сумму двух чисел на некоторое число, делим на это число отдельно каждое слагаемое и полученные частные складываем.

С помощью букв эти действия могут быть описаны так:

$$(a + b) : c = a : c + b : c.$$

Если в качестве знака деления использовать черту дроби, то равенство примет такой вид:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Это буквенное равенство позволяет любое частное вида $\frac{a+b}{c}$ записать в виде суммы дробей $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$.

В таблице приведены еще некоторые примеры приемов вычислений и дана их буквенная запись.

Пример	Прием	Буквенная запись
$145 - 98 =$ $= 145 - (100 - 2) =$ $= (145 - 100) + 2 =$ $= 45 + 2 = 47$	Чтобы из числа вычесть разность, можно сначала вычесть из него уменьшаемое и затем к полученному результату прибавить вычитаемое	$a - (b - c) = a - b + c$
$1028 : 4 =$ $= 1028 : (2 \cdot 2) =$ $= (1028 : 2) : 2 =$ $= 514 : 2 = 257$	Чтобы разделить число на произведение двух чисел, можно сначала разделить это число на один множитель, а затем полученный результат разделить на другой множитель	$a : (bc) = (a : b) : c$

А

236. С помощью какого приема удобно найти значение данного выражения? Запишите соответствующую цепочку числовых равенств, а потом опишите используемый прием с помощью букв:
а) $256 + 98$; б) $138 + 106$; в) $87 - 49$; г) $94 - 61$.

237. Подберите соответствующее буквенное равенство из предыдущего упражнения и, используя его, запишите без скобок следующие выражения:

$$x - (y - z), \quad y + (a - c), \quad m + (p + n), \quad r - (s + t).$$

238. Для вычисления площади прямоугольника, изображенного на рисунке 3.1, *а*, можно составить выражение $a\ (b + c)$ или выражение $ab + ac$. Результат будет один и тот же:

$$a\ (b + c) = ab + ac.$$

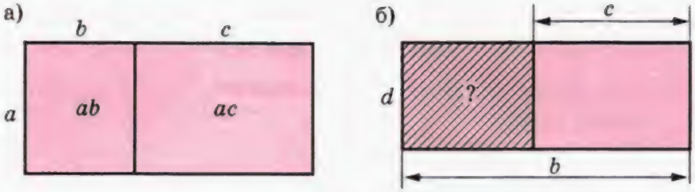


Рис. 3.1

Составьте два разных выражения для вычисления площади заштрихованной части прямоугольника на рисунке 3.1, *б* и запишите соответствующее равенство.

239. В магазине продаются орехи, расфасованные в пакеты по x граммов в каждом. Продали a пакетов с грецкими орехами, b пакетов с арахисом и c пакетов с фундуком. Составьте различные выражения для вычисления общей массы проданных орехов и запишите соответствующие равенства.

240. (*Задание с выбором ответа.*) Рассмотрите различные способы вычисления площади прямоугольника (рис. 3.2) и определите, какое из приведенных ниже равенств неверно.

А. $a(b + c + d) = ab + ac + ad$.
Б. $a(b + c + d) = a(b + c) + ad$.
В. $ab + ac + ad = a(b + c) + a(c + d) - ac$.
Г. $ab + ac + ad = a(b + c) + a(c + d)$.

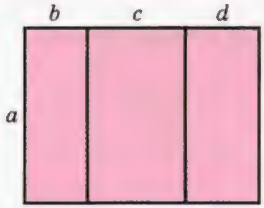


Рис. 3.2

241. Запишите с помощью букв свойство арифметического действия, которое зашифровано данными равенствами:

а) $6 \cdot 0 = 0$,
$1{,}8 \cdot 0 = 0$,
$-7 \cdot 0 = 0$;

б) $-1 \cdot 36 = -36$,
$0{,}5 \cdot (-1) = -0{,}5$,
$-3 \cdot (-1) = 3$;

в) $12 \cdot 1 = 12$,
$1 \cdot (-8) = -8$,
$1 \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$;

г) $1{,}7 + 0 = 1{,}7$,
$-6 + 0 = -6$,
$\frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$.

242. Приведите три числовых примера, иллюстрирующих буквенное равенство:

а) $\frac{y}{y} = 1$; б) $a + (-a) = 0$; в) $-(-x) = x$.

243. Как можно устно умножить какое-нибудь число на 1,5? Запишите соответствующее правило с помощью букв.

Б

244. Запишите с помощью букв правило, которое зашифровано данными равенствами:

а) $\frac{1}{7}+\frac{3}{7}=\frac{1+3}{7}$,

$\frac{2}{11}+\frac{6}{11}=\frac{2+6}{11}$,

$\frac{3}{2}+\frac{9}{2}=\frac{3+9}{2}$;

б) $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2-1}{3}$,

$\frac{5}{12}-\frac{8}{12}=\frac{5-8}{12}$,

$\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3-1}{5}$;

в) $\frac{2}{3}\cdot 4=\frac{2\cdot 4}{3}$,

$\frac{5}{8}\cdot 13=\frac{5\cdot 13}{8}$,

$\frac{4}{3}\cdot 12=\frac{4\cdot 12}{8}$;

г) $\frac{3}{4}:\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 5}$,

$\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 1}$,

$\frac{11}{5}:\frac{2}{9}=\frac{11\cdot 9}{5\cdot 2}$.

245. Выполните действия с дробями, записанными буквами:

а) $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}$; в) $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}$; д) $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\right):\frac{a}{c}$;

б) $\frac{m}{n}:\frac{a}{n}$; г) $\frac{a}{b}\cdot bc$; е) $\left(\frac{m}{n}:\frac{m}{a}\right):\frac{a}{b}$.

246. Смешанная дробь записана в виде суммы $a+\frac{b}{c}$, где буквами a, b и c обозначены некоторые натуральные числа. Запишите с помощью букв правило обращения смешанной дроби в неправильную дробь.

247. Найдите площадь фигуры (рис. 3.3) сначала вычитанием площадей, а потом сложением площадей и запишите соответствующее равенство.

248. Составьте несколько различных выражений для вычисления площади прямоугольника (рис. 3.4) и запишите цепочку равенств.

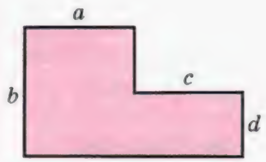


Рис. 3.3

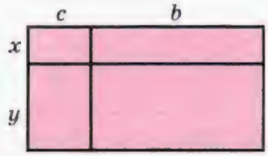


Рис. 3.4

249. Запишите без скобок выражение $a - (b + c + d)$.
Если вам трудно сделать это сразу, то обратитесь к числовому примеру:

$$543 - 126 = 543 - (100 + 20 + 6) = \dots .$$

Какое число в этом примере записано вместо буквы a? вместо буквы b? вместо буквы c? вместо буквы d?

250. Запишите с помощью букв прием, используя который можно разделить:
а) сумму трех чисел на некоторое число;
б) сумму четырех чисел на некоторое число.

251. Запишите с помощью букв и скобок несколько разных способов вычисления произведения четырех чисел. Ответ запишите в виде цепочки равенств.

3.2 Преобразование буквенных выражений

При изучении предыдущего пункта вам приходилось записывать с помощью букв правила, по которым можно выполнять вычисления, например, правило вычитания из числа суммы двух чисел: для любых чисел a, b, c

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

Это равенство показывает, что разность $a - (b + c)$ можно заменить выражением $a - b - c$; числовое значение при этом не изменится.

В алгебре такие выражения, как $a - (b + c)$ и $a - b - c$, называют **тождественно равными** или просто **равными**. Замену одного выражения другим, равным ему, называют **преобразованием выражения**. Соответствующие равенства объявляют **законами алгебры**.

Так, равенство $a - (b + c) = a - b - c$ является законом алгебры. Точно так же законами алгебры являются известные вам равенства:

$$a + b = b + a, \qquad ab = ba,$$
$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (ab)c = a(bc),$$
$$a(b + c) = ab + ac.$$

Законы алгебры дают нам *правила преобразования* буквенных, т. е. алгебраических, выражений. Так, из переместительного и сочетательного законов сложения следует правило:

> в любой сумме слагаемые можно как угодно переставлять и произвольным образом объединять в группы.

Это правило можно применять для преобразования любых выражений — содержащих и буквы, и числа. Например, выражение $(a + b) + (c + d + 4)$ можно записать в виде $(a + d) + (b + c) + 4$.

С помощью указанного правила можно преобразовывать не только «чистые» суммы, но и смешанные выражения, составленные с помощью знаков «+» и «−».

Рассмотрим, например, выражение

$$2a - x + 3y.$$

Так как вычитание всегда можно заменить сложением, то его можно считать суммой выражений $2a$, $-x$ и $3y$:

$$2a - x + 3y = 2a + (-x) + 3y.$$

Меняя каким-либо образом эти слагаемые местами, будем получать равные выражения. Например:

$$2a - x + 3y = 2a + 3y - x = 3y - x + 2a.$$

Такие выражения, как $2a - x + 3y$, в математике иногда называют **алгебраическими суммами** — суммами потому, что их всегда можно представить в виде суммы, а алгебраическими потому, что в исходной записи они все же «чистыми» суммами не являются. В алгебраической сумме, как мы видели, слагаемые «путешествуют» вместе со своими знаками.

Заметим, что в алгебраических суммах на первом месте принято записывать слагаемое со знаком «+» (если, конечно, такое имеется), причем этот знак перед первым слагаемым опускают. Например, алгебраическую сумму $-a - b + c$ заменяют более «красивым» выражением $c - a - b$.

В дальнейшем для краткости вместо слов «алгебраическая сумма» мы будем говорить просто «сумма».

Преобразование буквенного выражения часто выполняют с целью приведения его к более простому или к более «красивому» виду.

■ Пример 1. Упростим выражение $a + b + a - b$.

Данное выражение — сумма, состоящая из четырех слагаемых: a, b, a и $-b$.

Переставим слагаемые в этой сумме:

$$a + b + a - b = a + a + b + (-b).$$

Сгруппируем первые два и последние два слагаемых:

$$a + a + b + (-b) = (a + a) + (b + (-b)).$$

Ясно, что $a + a = 2a$. Кроме того, $b + (-b) = 0$ — это равенство является одним из законов алгебры. Значит,

$$(a + a) + (b + (-b)) = 2a + 0 = 2a.$$

На последнем шаге мы воспользовались еще одним законом, согласно которому от прибавления нуля сумма не меняется.

Таким образом,

$$a + b + a - b = 2a.$$

Выполненные преобразования можно записать в виде цепочки:

$$a + b + a - b = a + a + b + (-b) = (a + a) + (b + (-b)) = 2a + 0 = 2a.$$

Мы привели здесь подробную запись, чтобы показать, как работают законы алгебры, а на практике промежуточные шаги часто выполняют устно — слагаемые переставляются и группируются не руками, а глазами. Например, можно было бы ограничиться такой цепочкой:

$$a + b + a - b = 2a + 0 = 2a.$$

Из переместительного и сочетательного законов умножения следует правило преобразования произведений:

> в любом произведении множители можно как угодно переставлять и произвольным образом объединять в группы.

■ Пример 2. Упростим произведение $5y \cdot (-4x)$.

Сгруппируем отдельно числовые и буквенные множители и запишем вначале произведение числовых множителей, а затем буквенных, расположив их в алфавитном порядке:

$$5y \cdot (-4x) = 5 \cdot (-4) \cdot xy = (-20)xy.$$

Скобки, окружающие отрицательный множитель, записанный на первом месте, обычно опускают. Поэтому

$$5y \cdot (-4x) = -20xy.$$

Если выражение является произведением, в котором первый множитель — число, а остальные множители — буквы, то это число называют *коэффициентом* этого произведения. Так, в выражении $-20xy$ числовой множитель -20 является коэффициентом.

Заметим, что коэффициент, равный 1, обычно не пишут: равенство $1 \cdot a = a$ является законом алгебры. А вместо коэффициента -1 просто ставят знак «$-$». Например, $(-1) \cdot ab = -ab$.

■ Пример 3. Упростим произведение $(-a)ca(-b)$.

На произведение буквенных множителей распространяется известное правило знаков «минус на минус дает плюс»: $(-a)(-b) = ab$ — это закон алгебры. Поэтому

$$(-a)ca(-b) = +acab = acab.$$

Переставив множители и заменив произведение одинаковых множителей степенью, получим

$$acab = aabc = a^2bc.$$

А

252. Назовите каждое слагаемое алгебраической суммы:

а) $a - b + c - d$; г) $-2x - 3y - 10z + t$;
б) $-x - y - z - 10$; д) $ab + ac - bc - 4$;
в) $3a - 5b + 6c - 2d - 1$; е) $2xyz - 3xy + xz - y$.

253. Составьте алгебраическую сумму из следующих слагаемых:

а) $-x,\ -y,\ a,\ -b$; г) $-p,\ 12q,\ -2m,\ -3n,\ 5$;
б) $a,\ -b,\ -c,\ d$; д) $2xy,\ -3xz,\ yz,\ -2$;
в) $2a,\ -2b,\ 4c,\ -3d$; е) $-abc,\ -2ac,\ bc,\ 4ab$.

254. Выражение $x + (-y) + (-2z)$ можно записать в виде алгебраической суммы, опустив знаки сложения перед скобками:

$$x + (-y) + (-2z) = x - y - 2z.$$

Воспользовавшись этим образцом, преобразуйте выражение:

а) $5a + (-b) + (-3c)$; в) $-m + (-n) + p$;
б) $4x + y + (-6z)$; г) $-m + (-n) + (-p)$.

255. Замените выражение равным, не содержащим скобок:

а) $a + (-b)$; д) $a - (-b) + (-c)$;
б) $a - (-b)$; е) $-x + (-y) + (-z) - d$;
в) $-c + (-a)$; ж) $a - c - (-b) - (-d)$;
г) $-x - (-y)$; з) $a - (-x) + (-y) - (-c)$.

256. Запишите выражение, равное данному, изменив каким-либо способом порядок слагаемых:

а) $a + b + c$; г) $7 + 2a - 5c$;
б) $-x + y - z$; д) $b - 3d + 10$;
в) $x - a - c + d$; е) $-5m + 3n - 1$.

257. (*Задание с выбором ответа.*) Какое из выражений не равно выражению $a - b + c - d$?

А. $a + c - b - d$. **В.** $-b + a - d + c$.
Б. $a - d + c - b$. **Г.** $b - a - d + c$.

258. Для каждого из выражений

$$m + m + m + m + m; \qquad m + m + m + m + m + m + m;$$
$$mmmmm; \qquad mmmmmmm$$

найдите равное среди следующих выражений:

$$m + 5; \quad m^7; \quad 5m; \quad m^5; \quad m + 7; \quad 7m.$$

259. Чему равен периметр фигуры, изображенной на рисунке 3.5, *а*, *б*?

260. Из проволоки нужно согнуть каркас прямоугольного параллелепипеда (рис. 3.6, *а*, *б*). Составьте выражение для вычисления длины проволоки, которая для этого потребуется.

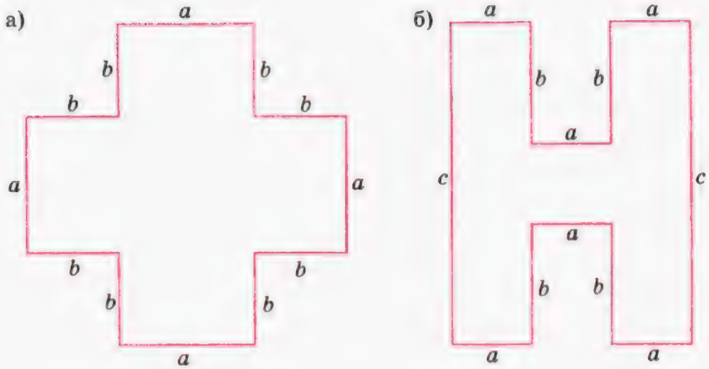


Рис. 3.5

Упростите выражение (261—262).

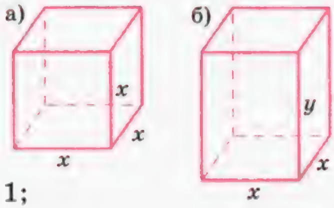


Рис. 3.6

261. а) $24 + m - 36$; г) $12 - b - 3$;
б) $x - 10 - 2$; д) $-8 - 12 + c$;
в) $a - 1 + 1$; е) $10 - y - 10$.

262. а) $b - a + b + a$; д) $x + x - 15 + 15$;
б) $x - y - z + y$; е) $a - 1 + a - 1 + a - 1$;
в) $c - 10 + 15 - c$; ж) $a - 3 + b + 3$;
г) $x + y + x + x - y$; з) $m + m + 1 + m - 20$.

263. Упростите произведение и назовите коэффициент:
а) $2x \cdot 3y$; д) $a \cdot (-3)d \cdot 4$;
б) $2a \cdot 0{,}5b$; е) $-8p \cdot 0{,}125k$;
в) $10a \cdot \frac{1}{2}b \cdot 3c$; ж) $-6z \cdot (-2x) \cdot y$;
г) $m \cdot 0{,}1n \cdot 10$; з) $-a \cdot (-b) \cdot 4c$.

264. Упростите выражение:
а) $-x \cdot (-y) \cdot (-z)$; в) $-a \cdot (-b) \cdot (-c) \cdot (-d)$;
б) $-m \cdot (-n) \cdot p$; г) $a \cdot (-b) \cdot (-c) \cdot (-d)$.

265. Для каждого выражения из верхней строки выберите равное ему из нижней строки и запишите соответствующее равенство:

$a(-b)c \qquad (-c)(-a)b \qquad ad(-c)(-b) \qquad (-a)(-b)(-c)d$

$abcd \qquad -abcd \qquad abc \qquad -abc$

266. Упростите произведение:
а) $3m \cdot 2m$; д) $(-z)xz(-y)$;
б) $10a \cdot 0{,}2a$; е) $(-2a) \cdot (-5a)$;
в) $3c \cdot 0{,}5x \cdot c$; ж) $-3m \cdot (-2n) \cdot m$;
г) $x \cdot 5y \cdot x$; з) $4c \cdot (-2c) \cdot (-b) \cdot (-b)$.

267. Упростите выражение:

а) $2ab \cdot 3ac$; в) $0{,}25cd \cdot \frac{1}{4}c$; д) $-\frac{2}{3}mnp \cdot (-\frac{1}{2}n)$;

б) $5xy \cdot (-0{,}2xy)$; г) $8abc \cdot (-3ab)$; е) $0{,}1xyz \cdot 2xy$.

268. Составьте выражение по условию задачи и упростите его:

а) Всего в автопарке M машин, $\frac{5}{6}$ из них — автобусы, а $\frac{2}{3}$ из этих автобусов — микроавтобусы. Сколько в автопарке микроавтобусов?

б) В продаже было x велосипедов, 80% из них — двухколесные, среди которых 20% — гоночные. Сколько было в продаже гоночных велосипедов?

269. Назовите общий множитель числителя и знаменателя дроби и сократите ее:

а) $\frac{4xy}{5yz}$; в) $\frac{8ab}{12abc}$; д) $\frac{6mnk}{9knp}$; ж) $\frac{4a}{6a^2}$;

б) $\frac{15km}{10nm}$; г) $\frac{7xyz}{21xz}$; е) $\frac{2x^2}{3x}$; з) $\frac{10c^3}{12c}$.

270. Запишите тремя способами число, противоположное дроби: $\frac{2}{3}$; $\frac{a}{c}$.

271. Сократите дробь:

а) $\frac{-x}{xy}$; в) $\frac{2xy}{-5y}$; д) $\frac{-5ab^2}{10ab}$; ж) $\frac{-9mn}{12n^3}$;

б) $\frac{abc}{-bcx}$; г) $\frac{-3a}{-6a^2}$; е) $\frac{-ax}{-bx}$; з) $\frac{8abc}{-6bcd}$.

272. Ответьте на вопрос, воспользовавшись приведенным образцом:

а) Одну сторону прямоугольника увеличили в 2 раза, а другую — в 1,5 раза. Во сколько раз увеличилась площадь прямоугольника?

б) Длины ребер прямоугольного параллелепипеда увеличили соответственно в 2, 3 и 4 раза. Во сколько раз увеличился его объем?

в) Длину ребра куба увеличили в n раз. Во сколько раз увеличился его объем?

Образец. Сторону квадрата увеличили в 3 раза. Во сколько раз увеличилась его площадь?
Обозначим сторону квадрата буквой a, тогда его площадь равна a^2, а площадь нового квадрата равна $(3a)^2 = 3a \cdot 3a = 9a^2$.
Найдем отношение площадей квадратов: $\frac{9a^2}{a^2} = 9$. Таким образом, площадь увеличилась в 9 раз.

Б

273. Известно, что k — нечетное число. Четным или нечетным является число: $k+k+k+k+k$; $k+k+k+k+10$; $(k+k)(k+k+k)$?

274. Пусть a — четное число, а b — нечетное. Четным или нечетным является число: $a+a+a+b+b$; $a+a+b+b+b$?

275. Чему равна сумма 15 последовательных натуральных чисел, первое из которых равно n?

276. В первом ряду амфитеатра a мест, а в каждом следующем на 2 места больше, чем в предыдущем. Сколько всего мест в амфитеатре, если он состоит: а) из 5 рядов; б) из 10 рядов?

277. Упростите произведение:

а) $6a(ab)^2b^3$; в) $a(-ac)^2$; д) $-z(-x^2)(-xz)$;

б) $(xy)^2\cdot(xy)^3$; г) $-c(cd)^2$; е) $ab^2(ab)^2$.

278. Докажите, что:

а) $(ab):c=a(b:c)$; в) $a:(bc)=(a:b):c$;

б) $(a:b):c=(a:c):b$; г) $a:(b:c)=(a:b)c$.

Образец. $(ab):c=\frac{ab}{c}=a\frac{b}{c}=a(b:c)$.

279. Подставьте в выражение ab вместо переменных a и b указанные выражения и выполните преобразования:

а) $a=3xy$, $b=-2xy$; б) $a=-0{,}1x$, $b=20xz$.

280. Подставьте в каждое из выражений $2x$, x^2, x^3 вместо переменной x выражение $-y$ и упростите получившееся выражение.

281. Составьте выражение для вычисления площади фигуры (рис. 3.7, *а*, *б*).

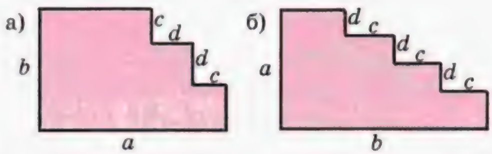


Рис. 3.7

3.3 Раскрытие скобок

Из буквенных выражений с помощью знаков действий и скобок составляют другие буквенные выражения. Возьмем, например, выражения $2a$ и $3x-y$. Тогда

$2a+(3x-y)$ — сумма выражений $2a$ и $3x-y$,

$2a-(3x-y)$ — разность выражений $2a$ и $3x-y$,

$2a(3x-y)$ — произведение выражений $2a$ и $3x-y$.

Эти выражения записаны с помощью скобок, но каждое из них можно заменить равным выражением без скобок. Такое преобразование выражений называют *раскрытием скобок.*

Раскроем скобки в выражении $2a + (3x - y)$. Будем рассуждать так: чтобы прибавить к $2a$ сумму $3x$ и $-y$, можно прибавить отдельно каждое из этих слагаемых. Поэтому

$$2a + (3x - y) = 2a + 3x + (-y) = 2a + 3x - y.$$

Таким образом, $2a + (3x - y) = 2a + 3x - y$.

Теперь раскроем скобки в выражении $2a - (3x - y)$. Чтобы вычесть из $2a$ сумму $3x$ и $-y$, можно вычесть отдельно каждое из этих слагаемых или, что то же самое, прибавить выражения, им противоположные:

$$2a - (3x - y) = 2a + (-3x) + (-(-y)) = 2a - 3x + y.$$

Таким образом, $2a - (3x - y) = 2a - 3x + y$.

> Чтобы к некоторому выражению прибавить алгебраическую сумму, надо прибавить к этому выражению отдельно каждое слагаемое этой суммы.
> Чтобы из некоторого выражения вычесть алгебраическую сумму, надо прибавить к нему отдельно каждое слагаемое этой суммы, взяв его с противоположным знаком.

Эти правила называют *правилами раскрытия скобок, перед которыми стоит знак «+» или «−»*. Они позволяют выполнять рассмотренные преобразования короче.

■ Пример. Раскроем скобки в выражении

$$a - (a + b - c).$$

Перед скобками стоит знак «−». Поэтому, раскрывая скобки, запишем каждое слагаемое a, b и $-c$ с противоположным знаком:

$$a - (a + b - c) = a - a - b + c = 0 - b + c = c - b.$$

Раскрыть скобки в произведении $2a(3x - y)$ можно с помощью распределительного закона. Чтобы умножить $2a$ на сумму $3x$ и $-y$, нужно умножить $2a$ отдельно на каждое слагаемое этой суммы:

$$2a(3x - y) = 2a(3x + (-y)) = 2a \cdot 3x + 2a \cdot (-y) = 6ax + (-2ay) =$$
$$= 6ax - 2ay.$$

Такое преобразование обычно записывают короче, выполняя промежуточные шаги устно: $2a(3x - y) = 6ax - 2ay$.

> Чтобы умножить некоторое выражение на алгебраическую сумму, нужно умножить это выражение отдельно на каждое слагаемое суммы и результаты сложить.

А

282. Раскройте скобки:

а) $x + (y - z)$; д) $a + (b - c + d)$; и) $(a - b) + (c - d)$;
б) $a - (c + x)$; е) $a - (b - c - d)$; к) $(x + y) - (z + t)$;
в) $m - (n - p)$; ж) $a - (b + c + d)$; л) $(m - n) - (k - t)$;
г) $a - (-b - d)$; з) $a + (b + c - d)$; м) $(t + s) + (-p - m)$.

283. (*Задание с выбором ответа.*) Какому из следующих выражений равно выражение $a - (b + c - d)$?

А. $a - b + c - d$. **Б.** $a - b - c - d$. **В.** $a - b - c + d$.

284. а) К сумме двух чисел прибавьте разность этих же чисел и упростите получившееся выражение.

б) От суммы двух чисел отнимите разность этих же чисел и упростите получившееся выражение.

285. Упростите выражение:

а) $(x + y) + (y - x)$; д) $m - (n - p - m)$;
б) $(a - b) - (a - b)$; е) $(a + b) - (b + c) - (a - c)$;
в) $(c - d) - (c + d)$; ж) $(k + m) - (k - m) + (m - k)$;
г) $(u + v) - (v - u)$; з) $(b + 1) - (a - 1) - (b - a)$.

286. Восстановите сумму в скобках:

а) $x - (...) = x - a + b - c$; б) $x - y = (x - a) + (...)$.

287. Найдите сумму:

а) трех последовательных натуральных чисел, начиная с числа n;

б) пяти последовательных натуральных чисел, начиная с n;

в) трех последовательных натуральных чисел, среднее из которых равно n;

г) пяти последовательных натуральных чисел, среднее из которых равно n.

288. а) Чему равен периметр прямоугольника, одна сторона которого равна x см, а другая — на 2 см больше? на 3 см меньше?

б) Чему равен периметр треугольника, одна сторона которого равна a см, вторая — на 1 см больше первой, а третья — на 2 см меньше второй?

289. а) На первой полке стоят x книг, на второй — на 3 книги больше, а на третьей — на 5 книг меньше, чем на первой. Сколько книг на трех полках?

б) В первом книжном шкафу a книг, во втором — на 15 книг меньше, а в третьем — на 40 книг больше, чем во втором. Сколько книг в трех шкафах?

290. а) Два велосипедиста едут навстречу друг другу из пунктов A и B. Первый до встречи проехал l км, а второй — на m км больше. Чему равно расстояние между A и B?

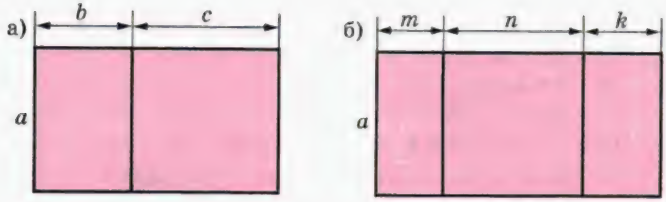


Рис. 3.8

б) Расстояние между пунктами s км. Турист идет из одного пункта в другой. Пройдя x км, что составило большую часть пути, он сделал остановку. Сколько километров ему осталось пройти? На сколько километров оставшееся расстояние меньше пройденного?

291. Составьте два выражения для вычисления площади фигуры (рис. 3.8, *а*, *б*) и покажите, как одно из этих выражений можно преобразовать в другое.

292. Раскройте скобки в произведении:

а) $8(x+3)$; в) $-9(a-4)$; д) $12(a-b)$;
б) $2(a-1)$; г) $-7(b+5)$; е) $-3(x-y)$.

293. Выполните умножение:

а) $a(b-x)$; в) $(b-a)\cdot(-2)$; д) $y(x-y-z)$;
б) $x(x+y)$; г) $(10-a)\cdot 4$; е) $(a-m+n)\cdot(-5)$.

294. Раскройте скобки в произведении:

а) $\frac{1}{4}(4x-16)$; в) $(2x-3y)\cdot(-3)$; д) $2x(a+3b-c)$;
б) $-\frac{1}{3}(3x+12)$; г) $2m(m-n)$; е) $-c(x-2y+3z)$.

295. Упростите:

а) $c(a+1)-c$; в) $m(1+m)-(m-1)$;
б) $\frac{1}{4}(8b-2)-1$; г) $\frac{1}{3}(3k+9)-k$.

Б

296. Расставьте скобки так, чтобы левая часть равенства была равна правой:

а) $x-x-x=x$; б) $x-y-y-x=2x$.

297. Упростите выражение:

а) $(ab-1)-(ab+1)-(a-b)$;
б) $(m-mn)-(n-mn)+(m+n)$.

298. а) В выражении $a+b+c$ выполните подстановку $a=x-y$, $b=y-z$, $c=x+z$ и упростите полученное выражение.

б) В выражении $a-b-c$ выполните подстановку $a=x+y$, $b=y+z$, $c=x-z$ и упростите полученное выражение.

299. Раскройте скобки:

а) $a - (b - (c + 4))$;

б) $x - (3 - (x + 6))$;

в) $a - (a - (a - 10))$.

300. Запишите выражения для вычисления площади фигуры (рис. 3.9) сначала сложением площадей прямоугольников, а затем вычитанием. Покажите, как можно получить второе выражение из первого с помощью преобразований.

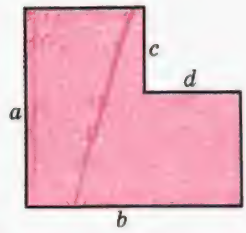


Рис. 3.9

301. а) Покажите, что скорость лодки по течению реки больше скорости лодки против течения на удвоенную скорость течения.

б) Покажите, что собственная скорость лодки равна половине суммы скорости движения лодки по течению реки и скорости ее движения против течения.

302. Пусть сумма трех последовательных натуральных чисел равна N. Найдите сумму трех следующих натуральных чисел.

303. Пусть сумма трех последовательных четных чисел равна A. Найдите:

а) сумму трех следующих четных чисел;

б) сумму трех следующих нечетных чисел.

304. Докажите, что сумма двух последовательных натуральных чисел является нечетным числом.

305. (*Задача-исследование.*)

1) Выясните, делится ли сумма:

а) любых трех последовательных натуральных чисел на 3;

б) любых четырех последовательных натуральных чисел на 4;

в) любых пяти последовательных натуральных чисел на 5;

г) любых шести последовательных натуральных чисел на 6.

2) Установите закономерность.

3.4 Приведение подобных слагаемых

Рассмотрим сумму

$$17 \cdot 3 + 17 \cdot 20 + 17 \cdot 9.$$

Ясно, что она делится на 17, так как

$$17 \cdot 3 + 17 \cdot 20 + 17 \cdot 9 = 17 \cdot (3 + 20 + 9) = 17 \cdot 32.$$

Чтобы доказать наше утверждение, мы преобразовали сумму в произведение: вынесли за скобки число 17.

Точно так же можно преобразовывать и суммы, являющиеся буквенными выражениями, например сумму

$$ab + ac - ad.$$

Каждое слагаемое в этой сумме содержит один и тот же множитель a. Этот общий множитель можно вынести за скобки:

$$ab + ac - ad = a(b + c - d).$$

А право на такое преобразование нам дает распределительный закон. Только в данном случае этот закон мы применяем справа налево: заменяем сумму произведением, а не наоборот.

На таком применении распределительного закона основан важный прием упрощения сумм, с которым мы познакомимся на следующем примере.

■ Пример 1. Рассмотрим сумму $2a + 4a + 5b - 10a$.

У слагаемых $2a$, $4a$ и $-10a$ одна и та же буквенная часть. Сгруппируем эти слагаемые:

$$2a + 4a + 5b - 10a = (2a + 4a - 10a) + 5b.$$

В сумме $2a + 4a - 10a$ вынесем за скобки общий множитель a:
$(2a + 4a - 10a) + 5b = a \cdot (2 + 4 - 10) + 5b = a \cdot (-4) + 5b = -4a + 5b.$

Таким образом,

$$2a + 4a + 5b - 10a = -4a + 5b.$$

Слагаемые, имеющие одинаковую буквенную часть, называют подобными слагаемыми.

Нам удалось упростить данное выражение, заменив сумму подобных слагаемых $2a + 4a - 10a$ одним выражением $-4a$. Такое преобразование называют *приведением подобных слагаемых*.

Чтобы привести подобные слагаемые, нужно:
1) сгруппировать эти слагаемые;
2) сложить их коэффициенты;
3) умножить полученную сумму на их общую буквенную часть.

Сформулированное правило позволяет приводить подобные слагаемые короче, опуская промежуточные шаги.

■ Пример 2. Упростим сумму $3ab + 6c - 2ab + ab - c$.

В этой сумме две группы подобных слагаемых. У одних общей буквенной частью является произведение ab, у других — буква c. Сгруппируем подобные слагаемые:

$$3ab + 6c - 2ab + ab - c = (3ab - 2ab + ab) + (6c - c).$$

Найдем сумму коэффициентов подобных слагаемых первой группы: $3 - 2 + 1 = 2$. Значит, эту группу слагаемых надо заменить выражением $2ab$. Обратите внимание: коэффициент слагаемого ab равен 1, так как $ab = 1 \cdot ab$.

Теперь найдем сумму коэффициентов слагаемых второй группы: $6 - 1 = 5$. Значит, в результате приведения подобных слагаемых второй группы мы получим $5c$. Заметьте: коэффициент слагаемого $-c$ равен -1, так как $-c = (-1) \cdot c$.

Таким образом,

$$3ab + 6c - 2ab + ab - c = 2ab + 5c.$$

Заметим, что подобные слагаемые можно группировать мысленно, выделяя их специальными знаками. Тогда решение записывается короче. В данном случае оно может быть, например, таким:

$$\underline{3ab} + \underline{\underline{6c}} - \underline{2ab} + \underline{ab} - \underline{\underline{c}} = 2ab + 5c.$$

А

Упростите (306—307).

306. а) $5a + 4a$; в) $1{,}5a + a + 2{,}5a$; д) $7m + m$;

б) $2x + 3x + 10$; г) $6y + 8 + 6y$; е) $\frac{3}{8}n + \frac{5}{8}n + \frac{1}{3}n$.

307. а) $18x - 3x + 5x$; г) $2a - 15 - a + 6$; ж) $-a - a - a - a$;

б) $2y - 9y$; д) $t + 6{,}3t - 2{,}1t$; з) $-2n - 2n - 2n$;

в) $1{,}2c - 0{,}3c + 5$; е) $5x - 5 + 3x - 4x$; и) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x$.

308. (*Задание с выбором ответа.*) Приведите подобные слагаемые в выражении $5a + 2x + 9a - 2x - 7$.

А. $14a + 4x - 7$. **Б.** $14ax - 7$. **В.** $7a$. **Г.** $14a - 7$.

309. Решите уравнение:

а) $2x + 3x = 150$; в) $-z - 3z = 4$; д) $m - 6m = 0$;

б) $15a - 8a = 1{,}4$; г) $y - 4y = 1$; е) $7x + 3x = -5$.

310. Приведите подобные слагаемые:

а) $7a + 9b + 3b - 5a - 6b + b$;

б) $4xy + 7x - 5xy - 2x$;

в) $12m^2 - 10 - 15m^2 + 4m^2$;

г) $3y^2 - y + 4y^2 - 2y + 3y$;

д) $abc - bc + 2abc + 3bc - 4abc$;

е) $7x - z - 3x - 5z - 4x - 7z + 1$.

311. Упростите:

а) $2ab - 3ba + 5a - a$; в) $xy - x + y - yx$;

б) $abc + bca + cab$; г) $xyz - yzx - xzy - zxy$.

312. Найдите значение выражения:

а) $3{,}7a - 2{,}5b - 7{,}5b + 0{,}3a + 10$ при $a = -1{,}5$, $b = 0{,}12$;

б) $-1{,}6x + 0{,}2y + 2{,}6x - 0{,}1 - 3{,}2y$ при $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{2}{3}$.

313. Раскройте скобки и упростите выражение:

а) $(2y + z) - (z - 2y)$;
б) $(x + 3) - (5x - 7)$;
в) $(2a - 1) + (3 - 4a)$;
г) $(a + b) - (a - b) - (b - a)$;
д) $3m - (2m - 3) + (2 - m)$;
е) $(3y - 1) - (2y - 2) + (y - 3)$.

314. Упростите выражение:

а) $2(a + b) + 3(a + b) + 2a$;
б) $5(x - z) - 2(x + z)$;
в) $2(2r - 3s) - 3(r - 2s)$;
г) $6(2a + c) + 2(6a - c) - 4c$;
д) $3(x - 1) + (x - 2) - x$;
е) $5n - 3(n + 2) + (n - 6)$;
ж) $m - (2m - 6) + 3(m - 3)$;
з) $2(3x + 1) - (x - 2) - 3x$.

315. Упростите:

а) $b(m - 7) - 7b$;
б) $x(c + 1) + c(x - 1)$;
в) $y(x - 4) + x(3 - y)$;
г) $m(k - 3) - k(m - 5)$;
д) $a(1 - b) - a(1 + b)$;
е) $b(2d - 5) - b(d + 5)$.

316. Фермер занял под картофель 15 соток, а его соседи — 18 соток и 12 соток. Запишите выражения для определения будущего урожая картофеля в каждом хозяйстве и общего урожая картофеля во всех трех хозяйствах, если в среднем с каждой сотки планируется собрать по M кг. Сколько примерно тонн картофеля всего будет собрано, если $M = 120$? $M = 200$?

317. 1) Сколько действий надо выполнить, чтобы вычислить значение выражения $ax + bx$?

Сколько действий надо выполнить, чтобы вычислить значение выражения $(a + b)x$?

Какое из этих двух выражений более удобно для вычислений с помощью калькулятора?

2) Вычислите с помощью калькулятора:

$18{,}11 \cdot 1{,}45 - 3{,}35 \cdot 1{,}45$;

$11{,}21 \cdot 2{,}25 + 17{,}5 \cdot 2{,}25 + 9{,}05 \cdot 2{,}25$;

$10{,}8 \cdot 3{,}86 + 10{,}8 \cdot 4{,}57 - 10{,}8 \cdot 1{,}75$.

318. Составьте выражение по условию задачи и упростите его:

а) На одной полке было n книг, на другой — в 3 раза больше, чем на первой, а на третьей — на 5 книг меньше, чем на второй. Сколько книг было на трех полках вместе?

б) В коробке на столе учителя лежат цветные карандаши. Из них m карандашей красные, синих на 7 меньше, а зеленых в 2 раза больше, чем синих. Сколько в коробке карандашей?

319. а) Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B. Скорость первого пешехода a км/ч, скорость второго — на 1 км/ч больше. Чему равно расстояние между A и B, если пешеходы встретились через 2 ч?

б) Производительность одного принтера n страниц в минуту, а другого — на 4 страницы больше. Сколько страниц можно напечатать с помощью этих двух принтеров за 1 ч?

320. (*Арифметический фокус.*)

1) Учитель показал учащимся арифметический фокус: «Задумайте число, прибавьте к нему 5, сумму умножьте на 2, к произведению прибавьте 8 и вычтите из результата удвоенное задуманное число. Теперь я отгадаю, какое число у вас получилось. У вас получилось 18».

Покажем с помощью алгебраических преобразований, как учитель узнал результат.

Задумайте число:	a
Прибавьте к нему 5:	$a + 5$
Умножьте сумму на 2:	$(a + 5) \cdot 2$
Прибавьте 8:	$(a + 5) \cdot 2 + 8$
Вычтите удвоенное задуманное число:	$(a + 5) \cdot 2 + 8 - 2a$

Упростим полученное выражение:

$$(a + 5) \cdot 2 + 8 - 2a = 2a + 10 + 8 - 2a = 18.$$

2) Покажите сами с помощью алгебраических преобразований, на чем основан следующий фокус: «Задумайте число, прибавьте к нему 4, эту сумму умножьте на 3, из произведения вычтите утроенное задуманное число и к результату прибавьте 12. Вы получили число 24».

3) Придумайте свой арифметический фокус и покажите с помощью алгебры, на чем он основан.

Б

321. Учащиеся выполняли на доске упражнения на приведение подобных слагаемых и затем стерли знаки между слагаемыми. Восстановите запись:

$7a \ \square \ 5b \ \square \ 3a \ \square \ b \ \square \ 4b \ \square \ 4a = 10b;$

$7a \ \square \ 5b \ \square \ 3a \ \square \ b \ \square \ 4b \ \square \ 4a = 6a.$

322. Упростите выражение:

а) $a(b + 3) + b(a + 3) - 3(a + b);$

б) $2(x - y) + 6(y - x) - (4x - 4y);$

в) $a(b + c) - b(a + c) - c(a + b);$

г) $m(n - l) + n(l - m) + l(m - n).$

323. Расставьте скобки так, чтобы путем преобразования левой части равенства можно было получить правую часть:

а) $2k - a - k - a = k;$

б) $2k - a - k - a = k - a;$

в) $ab + 1 - ab + 1 = 0;$

г) $ab + 1 - ab + 1 = b + 1.$

324. Раскройте скобки:

а) $4y - (3y - (2y + 1));$

б) $a - (2x - (2a - x));$

в) $3m - (3m + (3m - (m + 3)));$

г) $b - (2c - (3b + (4c - 5b))).$

325. В январе за квартиру заплатили n р., в феврале квартплата повысилась на 10%, а в марте — еще на 20%. Сколько заплатили за квартиру за эти три месяца?

326. В центре городского района планировали разбить сквер прямоугольной формы размером $a \times b$ м. В процессе работ одну сторону увеличили на 50%, а другую уменьшили на 20%. Увеличилась или уменьшилась площадь сквера и на сколько процентов?

327. Автомобиль находился в пути 5 ч. Из этого времени t ч он ехал по проселочной дороге, остальное время — по шоссе. Какой путь проехал автомобиль, если по шоссе он ехал со скоростью a км/ч, а по проселку со скоростью, на 40 км/ч меньшей?

328. Лодка плыла некоторое время по течению реки и столько же времени против течения. Докажите, что для того, чтобы проплыть такое же расстояние в стоячей воде, потребуется такое же количество времени.

3.5 Еще раз о законах алгебры

(Для тех, кому интересно)

Правила преобразования буквенных выражений, как вы знаете, основаны на законах алгебры. А сами законы, в свою очередь, основываются на здравом смысле, точнее, на смысле арифметических действий над реальными величинами.

Но, исходя из здравого смысла, можно сразу, не прибегая к арифметике, получать многие правила, например, известное вам правило приведения подобных слагаемых.

Рассмотрим равенство $3x - 2x + 4x = 5x$. Его можно истолковать, или, как еще говорят, интерпретировать, так: если из имеющихся трех одинаковых предметов убрать два, а потом добавить четыре, то в результате получится пять предметов. Примерно так при решении задач рассуждали математики еще в Древней Греции.

Рассмотрим другие, более сложные примеры.

■ Пример 1. Почему равны выражения

$$x - (y + z + t) \text{ и } x - y - z - t?$$

Переведем этот вопрос на «язык денег»: у человека было x рублей, и он сделал три покупки стоимостью соответственно y, z и t рублей. Сколько у него осталось денег?

Подсчитать искомый остаток человек может двумя способами. Можно сначала найти общие затраты — они равны $y + z + t$ рублей, а затем найти остаток — он равен $x - (y + z + t)$ рублей.

А можно считать последовательно: после первой покупки у него осталось $x - y$ рублей, после второй $x - y - z$ рублей, после третьей $x - y - z - t$ рублей. Но полученные при этих способах подсчета остатки — это одна и та же сумма. Значит,

$$x - (y + z + t) = x - y - z - t.$$

■ Пример 2. Как обосновать правило раскрытия скобок:

$$x - (y - z) = x - y + z?$$

Пусть человек, имеющий x рублей, хотел купить вещь стоимостью y рублей, но оказалось, что эта вещь стоит на z рублей дешевле. Тогда после покупки у него осталось $x - (y - z)$ рублей. С другой стороны, он предполагал, что у него останется $x - y$ рублей, но z рублей он сэкономил, так что на самом деле у него осталось $x - y + z$ рублей. Поэтому

$$x - (y - z) = x - y + z.$$

Разумеется, истолковать данное равенство можно не только на «языке денег». Например, здесь удобно воспользоваться и «языком расстояний».

Пусть туристу надо было пройти x км, и в первый день он намеревался пройти y км, но прошел на z км меньше. Тогда после первого дня ему осталось пройти $x - (y - z)$ км. С другой стороны, он рассчитывал, что ему останется пройти $x - y$ км, а реально осталось пройти на z км больше, т.е. всего осталось пройти $x - y + z$ км. Так что $x - (y - z) = x - y + z$.

Для равенств, связанных с умножением, часто удобна интерпретация на «языке площадей».

■ Пример 3. Покажем, что $(xy) : z = x(y : z)$.

Рассмотрим прямоугольник со сторонами x и y (рис. 3.10). Разделим его сторону длиной y на z равных частей и разрежем данный прямоугольник. Тогда площадь каждого слоя будет равна $x(y : z)$ кв. ед. С другой стороны, всего имеется z слоев равной площади, а их общая площадь равна xy, и поэтому площадь каждого слоя равна $(xy) : z$ кв. ед. Следовательно, $(xy) : z = x(y : z)$.

329. Верно ли, что $(x - y)z = xz - yz$? Дайте истолкование этого равенства на «языке площадей».

330. Предложите какую-нибудь интерпретацию — на «языке денег» или на «языке расстояний» равенства:

а) $(x + z) - (y + z) = x - y$;

б) $x - (y - z + t) = x - y + z - t$.

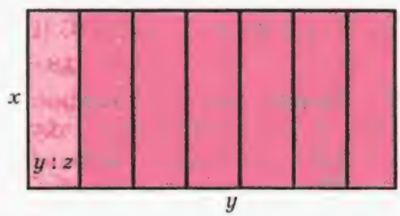


Рис. 3.10

331. Как можно истолковать на «языке объемов» равенство

$$(xy)z = x(yz)?$$

332. С помощью любого «языка» дайте истолкование равенства

$$x : (yz) = (x : y) : z.$$

333. Запишите равенство $x + (y - x) = y$, заменив знак «плюс» знаком умножения, а знак «минус» знаком деления — двоеточием или чертой дроби. Верно ли полученное равенство?

334. Запишите равенство $(xy) : (zt) = (x : z)\ (y : t)$, заменив знак деления знаком «минус», а знак умножения знаком «плюс». Верно ли полученное равенство?

Однако опоры на реальный смысл арифметических действий, вообще говоря, недостаточно. Ну хотя бы потому, что и на «языке денег», и на «языке расстояний», и на «языке площадей» мы всегда рассматриваем только положительные числа, а часто даже и натуральные.

С точки зрения математики алгебраические преобразования, которыми мы пользуемся, нуждаются в более строгом обосновании. И оказывается, ваших знаний вполне достаточно для проведения нужных доказательств. Надо только суметь воспользоваться этими знаниями.

Будем при доказательствах пользоваться переместительными законами сложения и умножения, сочетательными законами сложения и умножения, распределительным законом и некоторыми другими:

1. $a + b = b + a$.	5. $ab = ba$.
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$.	6. $(ab)c = a(bc)$.
3. $a + 0 = a$.	7. $a \cdot 1 = a$.
4. $a + (-a) = 0$.	8. $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

9. $a(b + c) = ab + ac$.

Назовем их **основными законами алгебры.**

Нам также понадобятся известные вам определения разности и частного:

> Разность чисел x и y — это такое число z, что $z + y = x$.
> Частное от деления числа x на число y — это такое число z, что $z \cdot y = x$.

■ Пример 4. Мы постоянно пользуемся равенством

$$x - y = x + (-y).$$

Почему оно верно?

Исходя из определения разности, убедимся в том, что

$$(x + (-y)) + y = x.$$

Действительно, $(x + (-y)) + y = x + ((-y) + y) = x + 0 = x$.

■ Пример 5. Докажем равенство $(-x)y = -xy$.

Фактически перед нами стоит задача: доказать, что произведение $(-x)y$ есть число, противоположное xy, или, что то же самое, доказать, что $(-x)y + xy = 0$.

Воспользовавшись распределительным законом получим:

$$(-x)y + xy = ((-x) + x)y = 0 \cdot y = 0.$$

■ Пример 6. Докажем, что $x + (y + (z + t)) = x + y + z + t$.

Этот пример может вызвать некоторое удивление, поскольку мы давно привыкли писать все суммы без скобок и разрешили это себе специальным правилом, вытекающим из сочетательного закона сложения.

В действительности, однако, мы должны доказать, что, преобразуя выражение по этому правилу, мы всегда будем получать верные равенства. А данный пример является одним из частных случаев для обоснования этого правила.

Вспомним сначала, что сумма $x + y + z + t$ — и вы привыкли к этому еще в начальной школе — вычисляется слева направо, т. е. если восстановить в этой сумме скобки, то получится равенство

$$x + y + z + t = ((x + y) + z) + t.$$

Поэтому мы должны доказать:

$$x + (y + (z + t)) = ((x + y) + z) + t.$$

И сейчас мы увидим, что это равенство действительно следует из сочетательного закона сложения:

$$x + (y + (z + t)) = (x + y) + (z + t) = ((x + y) + z) + t,$$

что и требовалось доказать.

Мы дважды воспользовались сочетательным законом: в первый раз мы применили его для чисел x, y и $z + t$, а во второй раз — для чисел $x + y$, z и t.

335. Как известно, перемножить непосредственно можно только два числа. Поэтому для вычисления произведения xyz (без изменения порядка множителей) в нем надо — хотя бы мысленно — поставить скобки, т.е. представить его как $(xy)z$ или как $x(yz)$. Итак, в выражении xyz можно поставить скобки двумя способами. А сколькими способами можно поставить скобки в выражении $xyzt$? Докажите, что при этом каждый раз будут получаться равные выражения.

336. В выражениях $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ и $2 : 3 : 4 : 5$ поставьте скобки всеми возможными способами и вычислите значения полученных выражений. Сделайте вывод.

337. Докажите, что $x + (y + (z + (t + u))) = x + y + z + t + u$.

ДЗ Дополнительные задания к главе 3

Раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых

338. Составьте сумму и разность выражений $m + 0{,}1n$ и $2(m - 0{,}3n)$ и упростите их.

339. Упростите выражение:

а) $5(x + 1{,}4y) - 0{,}8(2x + y)$;

б) $\frac{2}{3}(x - y + z) - (\frac{2}{3}x - y + z)$;

в) $-a + 0{,}5(3a + 0{,}2b) - (a + 0{,}1b)$;

г) $-10(\frac{2}{5}b + \frac{1}{2}) + \frac{3}{4}(8 - b) + 5b$.

340. Найдите значение выражения:

а) $3k + 0{,}5(1 - 6k) - (7 - 6k)$ при: $k = 0{,}05$; $k = -1{,}2$; $k = 10$;

б) $x(y - 1) - y(x + 1)$ при: $x = 1$, $y = -\frac{2}{3}$; $x = -\frac{1}{5}$, $y = -0{,}6$;

в) $c(b + c) - b(a - c) + c(b - c) + ab$ при: $b = 0{,}3$, $c = -\frac{1}{9}$; $b = -0{,}25$, $c = -\frac{2}{15}$.

341. Докажите, что число:

а) записанное тремя одинаковыми цифрами, делится на 37;

б) записанное четырьмя одинаковыми цифрами, делится на 11 и на 101.

Указание. Представьте число в виде суммы разрядных слагаемых. Например, число, записанное двумя одинаковыми цифрами, можно представить в виде $10a + a$.

342. В последовательности Фибоначчи каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \dots\ .$$

а) Обозначьте одно из чисел этой последовательности буквой a, следующее за ним — буквой b и запишите в виде буквенного выражения каждое из четырех следующих чисел. Докажите, что сумма любых шести последовательных чисел в последовательности Фибоначчи делится на 4.

б) Докажите, что сумма любых восьми последовательных чисел в последовательности Фибоначчи делится на 3.

343. Докажите, что:

а) $p(k + p) - 2k(p - 1) - p^2 = 2k - 2p$;

б) $a(b + 1) - c(a + b) + b(c + 1) - (a + b) = ab - ac$.

344. Докажите, что если равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ — пропорция, то $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ и $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ также являются пропорциями. Используя доказанное утверждение, составьте две новые пропорции из пропорции $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$.

Запишите выражение по условию задачи и упростите его **(345—347)**.

345. Автобус прошел расстояние между городами, равное 200 км, за 5 ч. За первый час пути он прошел x км, за второй — на 20 км меньше, а за третий — путь, в 1,5 раза больший, чем за предыдущий час. Сколько километров прошел автобус в оставшееся время?

346. Провод разрезали на четыре части так, что длина первой части, равная x м, в 3 раза меньше второй, на 1,5 м меньше третьей и в 2 раза больше четвертой. Какова длина всего провода?

347. В коробке n пуговиц. Их количество удвоили, а затем из коробки вынули дюжину пуговиц. Остаток пуговиц снова удвоили, а затем вновь вынули дюжину пуговиц. Эту операцию проделали и в третий раз. Сколько пуговиц стало в коробке?

Вопросы для повторения к главе 3

1. Назовите и запишите с помощью букв основные свойства сложения и умножения чисел.
2. На основании каких законов можно утверждать, что выполняется равенство:
   а) $-2a - c + 3y = 3y - 2a - c$;
   б) $2a \cdot (-3c) = -6ac$;
   в) $5(x - y) = 5x - 5y$?
3. Чему равен коэффициент в каждом из произведений:
$$-7ab;\ \frac{2}{3}x^2;\ mn;\ -xyz?$$
4. Сформулируйте правила раскрытия скобок, перед которыми стоит знак «+» или «−». Покажите их применение на примерах.
5. Сформулируйте правило раскрытия скобок в произведении. Покажите его применение для раскрытия скобок на примере произведения $x(2a - b + c)$.
6. Какие слагаемые называют подобными? Сформулируйте правило приведения подобных слагаемых и поясните его на примере выражения $5a - 4a + a - 6$.

Задания для самопроверки к главе 3

(Обязательные результаты обучения)

1. Упростите выражение:
а) $y \cdot (-2a) \cdot (-3b)$; б) $2xy \cdot 7xz$; в) $5ab \cdot (-0{,}2b)$.

2. Приведите подобные слагаемые:
а) $3x - x + 7x - 3x$; б) $2b - a + 4b - 7a + 7$.

3. Составьте выражение по условию задачи:
а) В одном ведре x л воды, в другом — на 3 л больше, а в третьем — на 4 л меньше, чем в первом. Сколько литров воды в трех ведрах?
б) Одна сторона прямоугольника l см, а другая — на m см больше. Чему равен периметр прямоугольника?

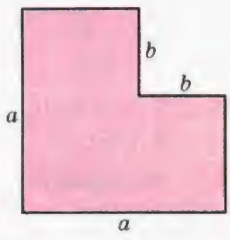
4. Найдите значение выражения $2a + 3 - 1{,}5a + 0{,}5$ при $a = -3$; 0; 4.

5. Упростите выражение:
а) $4a + (a + b) - (2a + 3b)$; б) $2(x + 3y) - 3(3x - y)$.

Тест к главе 3

1. Какое из следующих равенств выражает правило вычитания из числа суммы двух чисел?
А. $a + (b - c) = a + b - c$. **В.** $a - (b + c) = a - b - c$.
Б. $a - (b - c) = a - b + c$. **Г.** $(a + b) - c = a + b - c$.

2. Из приведенных выражений:
I. $a^2 - b^2$; II. $a^2 + b^2$; III. $a(a - b) + b(a - b)$ —
выберите те, с помощью которых можно найти площадь фигуры, изображенной на рисунке.
А. I и II. **Б.** I и III. **В.** II и III. **Г.** I, II и III.



3. Какому из выражений равно выражение
$$a + a + a + a + a + a?$$
А. $6a$. **Б.** a^6. **В.** $a + 6$. **Г.** 6.

4. Запишите без скобок алгебраическую сумму $2m - (-p) + (-12q)$.
А. $2m + p - 12q$. **Б.** $2m - p - 12q$. **В.** $2m - p + 12q$. **Г.** $2m + p + 12q$.

5. Каждое выражение из верхней строки соотнесите с равными ему выражениями из нижней строки.
$a - b - c$ $a - b + c$
$c - b + a$ $c - b - a$ $-c - b + a$ $-b + a - c$ $-b + a + c$

6. Какое из следующих равенств неверное?

А. $(-a)(-b)(-c) = -abc$. В. $a(-b)(-c) = abc$.

Б. $(-a)(-b)c = abc$. Г. $(-a)b(-c) = -abc$.

7. Упростите выражение $-3xy \cdot (-2xz)$.

Ответ. ______________

8. Туристы проехали на автобусе n км, на поезде в 3 раза больше и прошли пешком $\frac{1}{6}$ того расстояния, которое они проехали на поезде. Сколько километров туристы прошли пешком?

Ответ. ______________

9. Упростите выражение $(m + m + m)(n + n + n)$.

А. $6mn$. Б. $9mn$. В. m^3n^3. Г. $3(m + n)$.

10. Пусть x — отрицательное число. Какие из чисел:

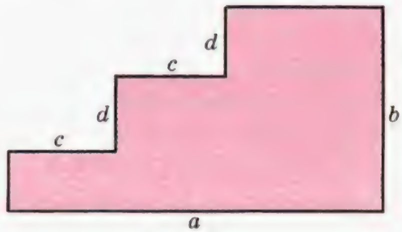
I. $x + x + x$; II. $x(x + x + x)$; III. $xxx + x$; IV. xxx — являются отрицательными?

А. I и II. Б. I и III. В. II и III. Г. I, III и IV.

11. Укажите выражение, равное выражению $(a - b) - (b - c)$.

А. $a + c$. Б. $a - c$. В. $a - 2b + c$. Г. $a - 2b - c$.

12. Какое из выражений можно использовать для вычисления площади фигуры, изображенной на рисунке?



А. $ab - cd$. В. $ab - 3cd$.

Б. $ab - 2cd$. Г. $ab - 2c \cdot 2d$.

13. Приведите подобные слагаемые: $xy + 3yz - 2xy - yz$.

Ответ. ______________

14. Упростите выражение $2(2a - 1) - 3(a + 1) + 1$.

Ответ. ______________

15. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые в выражении $a - (2b - (2a - 2(b + a)))$.

А. $a - 4b$. Б. a. В. $-3a - 4b$. Г. $a + 4b$.

16. Принтер A печатает со скоростью n страниц в минуту. Скорость принтера B в 2 раза больше скорости принтера A, а скорость принтера C в 1,5 раза больше скорости принтера B. На каждом из них надо распечатать по 50 страниц научного отчета. Принтеры включили одновременно. Сколько всего страниц отчета останется распечатать через 3 мин после начала работы?

Ответ. ______________

Уравнения

4.1 Алгебраический способ решения задач

Вы уже решали немало задач с помощью рассуждений и, конечно, поняли, что к каждой задаче надо подбирать свой особый ключик. Алгебра предлагает нам новые возможности. Оказывается, с помощью одного и того же общего приема можно решать самые разные, совсем не похожие одна на другую задачи.

Когда задачу решают *алгебраическим способом*, то прежде всего условие задачи переводят на язык математики. Основа такого перевода, его первый шаг — введение буквы для обозначения какой-либо неизвестной величины. В результате перевода обычно получается равенство, содержащее букву. Это равенство, как вы уже знаете, называют **уравнением**.

Решим с помощью составления уравнения такую задачу:

В семье две пары близнецов, родившихся с разницей в три года. В 2002 г. всем вместе исполнилось 50 лет. Сколько лет было каждому из близнецов в 2000 г.?

Обозначим через x возраст младших близнецов в 2000 г. Тогда старшим близнецам в этом году было по $x + 3$ года. В 2002 г., т. е. через 2 года, младшим близнецам было по $x + 2$ года, а старшим — по $x + 5$ лет.

По условию задачи суммарный возраст близнецов в 2002 г. составил 50 лет. Значит,

$$(x + 2) + (x + 2) + (x + 5) + (x + 5) = 50.$$

Таким образом, уравнение составлено. Теперь, чтобы найти неизвестное число x, это уравнение надо *решить*.

Сначала упростим его левую часть:

$$(x + 2) + (x + 2) + (x + 5) + (x + 5) =$$
$$= x + 2 + x + 2 + x + 5 + x + 5 = 4x + 14.$$

Мы получили более простое уравнение

$$4x + 14 = 50.$$

Найдем из этого уравнения слагаемое $4x$:

$$4x = 50 - 14,$$
$$4x = 36.$$

Теперь остается найти неизвестный множитель x:

$$x = 36 : 4,$$
$$x = 9.$$

Итак, мы нашли неизвестное число, которое обозначили буквой x. Однако это еще не ответ задачи. Буквой x был обозначен возраст младшей пары близнецов: значит, им в 2000 г. было по 9 лет. Но еще нужно найти возраст старшей пары близнецов. Так как старшим близнецам на 3 года больше, то им было по 12 лет.

Попробуйте решить эту же задачу арифметически. Вы сможете убедиться, что это не так уж и просто и что алгебраический способ безусловно легче.

А как и когда этот способ зародился? Известно, что впервые применил букву для обозначения неизвестной величины Диофант Александрийский — древнегреческий математик, живший в III в. Это был очень важный шаг в создании символического языка математики. Но только в XVII—XVIII вв. использование буквы для обозначения неизвестных стало общепринятым.

А

Составьте разные уравнения по условию задачи, обозначая буквой различные величины **(348—349)**.

348. а) В двух вагонах поезда 86 человек, причем в первом на 14 человек меньше, чем во втором. Сколько человек в каждом вагоне?

б) В двух классах 60 человек. Сколько среди них мальчиков и сколько девочек, если девочек на 6 больше, чем мальчиков?

349. а) В двух пачках вместе 350 листов бумаги. Сколько листов бумаги в каждой пачке, если известно, что в одной из них листов в 4 раза больше, чем в другой?

б) В июле число отдыхающих в пансионате возросло по сравнению с июнем в 2,5 раза. Сколько отдыхающих было в июне и сколько в июле, если всего в эти два месяца отдохнуло 4550 человек?

350. (*Задание с выбором ответа.*) В три ящика разложили 23 кг слив. Во втором ящике слив в 1,5 раза больше, чем в первом, а в третьем — на 2 кг больше, чем в первом. Сколько слив в каждом ящике?
Какое равенство является переводом условия этой задачи на математический язык? (Буквой x обозначена масса слив в первом ящике.)
А. $x + 1{,}5x + 2x = 23$.
Б. $x + (x + 1{,}5) + (x + 2) = 23$.
В. $x + 1{,}5x + (x + 2) = 23$.

351. (*Задание с выбором ответа.*) На трех книжных полках 47 книг. На верхней полке на 8 книг меньше, чем на средней, а на нижней — в 3 раза больше, чем на средней. Сколько книг на каждой полке?
Какое равенство является переводом условия этой задачи на математический язык? (Буквой x обозначено количество книг на средней полке.)
А. $(x + 8) + x + 3x = 47$.
Б. $(x - 8) + x + 3x = 47$.
В. $(x - 8) + x + (x + 3) = 47$.

352. Придумайте задачу, переводом которой на язык математики является уравнение:
а) $x + (x - 3) = 33$;
б) $x + (x + 3) + (x + 6) = 30$;
в) $x + 3x = 160$;
г) $x + 2x + 3x = 60$.

353. Составьте уравнение по условию задачи, опираясь на приведенный ниже план.
На одной овощной базе 500 т картофеля, а на другой 700 т. Ежедневно с первой базы отправляют в овощные магазины 20 ц картофеля, а со второй — 30 ц. Через сколько дней картофеля на овощных базах окажется поровну?
1) Выразите данные величины в одних и тех же единицах.
2) Обозначьте искомое количество дней буквой x.
3) Запишите выражения, показывающие:
а) сколько картофеля отправлено с первой овощной базы за x дней;
б) сколько картофеля отправлено со второй овощной базы за x дней;
в) сколько картофеля осталось на первой овощной базе через x дней;

г) сколько картофеля осталось на второй овощной базе через x дней.

4) Запишите уравнение.

354. Составьте уравнение по условию задачи.
В одной машине 3 т яблок, а в другой — 5 т яблок. Из первой машины выгрузили несколько ящиков по 15 кг в каждом, а из второй — в 2 раза больше ящиков по 20 кг в каждом. После этого в первой машине осталось столько же яблок, сколько во второй. Сколько ящиков выгрузили из каждой машины?

Б

355. Составьте разные уравнения по условию задачи:
а) Петр заметил, что в этом году он младше отца в 3 раза, отец младше деда в 2 раза, а сумма его возраста, возраста отца и возраста деда составляет 110 лет. Сколько лет каждому?
б) Брат старше сестры на 4 года. Отец сказал сыну: «Мне 30 лет. Если через 2 года я сложу твой возраст и возраст твоей сестры, то результат будет меньше моего возраста в 2 раза». Определите, сколько лет брату и сестре сейчас и сколько будет каждому из них через 2 года.

356. Вам знакома старинная задача о фазанах и кроликах: «В клетке находятся фазаны и кролики. Известно, что у них 35 голов и 94 ноги. Узнайте число фазанов и число кроликов».
Составьте разные уравнения по условию задачи, обозначив буквой: а) число фазанов; б) число кроликов; в) число ног у фазанов; г) число ног у кроликов.

357. Запишите условие задачи на языке уравнений:
а) К задуманному числу прибавили 11, затем сумму поделили пополам и получили число, которое на 2 больше задуманного. Какое число было задумано?
б) Из задуманного числа вычли 5, затем разность поделили на 5 и получили число, в 5 раз меньшее, чем получили бы, прибавив 5 к трети задуманного числа. Какое число было задумано?

358. Восстановите условие задачи «на задуманное число» по следующему уравнению (буквой обозначено задуманное число):
а) $8(x-1)=6x$; б) $(4y-7):3-1=y$.

359. (*Старинная задача.*) Некто сказал другу: «Дай мне 100 рупий, и я буду вдвое богаче тебя». Друг ответил: «Дай ты мне только 10, и я стану в 6 раз богаче тебя». Сколько денег было у каждого? Составьте уравнение по условию задачи.

4.2 Корни уравнения

Изучая предыдущий пункт, вы составляли уравнения по условиям задач. Однако уравнения в математике рассматривают не только в связи с текстовыми задачами.

Всякое равенство, содержащее переменную, можно рассматривать как уравнение. Например, равенства

$$x^2 + 4x = 3, \quad 3(2 - y) - 8 = 7 + 2y, \quad 1 - a^3 = 7 \text{ —}$$

это уравнения.

Напротив, числовые равенства $2 + 2 = 4$, $5 \cdot 7 = 35$ уравнениями не являются — в них нет переменной. И выражения $x^2 + 5x + 7$, $5(3 - 2c) - 5c$ тоже, конечно, уравнениями не являются, потому что они не являются равенствами.

Таким образом, уравнения характеризуются двумя очевидными свойствами, легко определяемыми на глаз: во-первых, уравнение — это равенство; во-вторых, в этом равенстве имеется буква — в одной из его частей или в обеих.

Если в уравнение вместо переменной подставить число, то получится числовое равенство. Числовое равенство, как известно, может быть верным или неверным. Решение уравнения — это поиск тех значений переменной, при которых получается верное равенство. Такие значения переменной, как вы знаете, называют **корнями уравнения**.

Определение

Корнем уравнения называется число, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство.

Русское слово «корень» в данном случае — это яркий пример метафоры в математическом языке: вспомните, как при решении текстовой задачи алгебраическим способом уравнение как бы вырастает из неизвестного числа x.

Уравнение $(x + 2) + (x + 2) + (x + 5) + (x + 5) = 50$, которое мы решали в предыдущем пункте, имеет только один корень — число 9.

Но уравнение может иметь и более одного корня. Например, у уравнения $x^2 = 9$ два корня — это числа -3 и 3.

Вообще уравнение может иметь сколько угодно корней, их даже может быть бесконечно много. Например, корнем уравнения $2(x + 3) = 2x + 6$, в обеих частях которого стоят равные выражения, является любое число. Действительно, какое бы число мы ни подставили в это уравнение вместо переменной x, получится верное числовое равенство.

А вот уравнение $x+1=x+3$ вообще не имеет корней, так как при любом значении x левая часть уравнения на 2 меньше его правой части.

Учитывая сказанное, мы можем уточнить смысл слов «решить уравнение»:

решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что корней у него нет.

Можно сказать и так:

решить уравнение — это значит найти множество его корней. (Вспомните, что множество может быть и пустым.)

А

360. Докажите, что:

а) число 4 является корнем уравнения $2x-7=5-x$;

б) число -3 является корнем уравнения $x(x+5)=-6$;

в) число 4 является корнем уравнения $\frac{x}{2}-\frac{x}{4}=1$;

г) число -2 является корнем уравнения $x - 2(5x-1)=-10x$.

361. Является ли корнем уравнения $2x^2-5x-3=0$ число:

а) 3; б) -4; в) $-\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2}$?

362. (*Задание с выбором ответа.*) Корнем какого уравнения является число -2?

А. $x^2+x+2=0$. **Б.** $x^4+16=0$. **В.** $(x-5)(x+2)=0$.

363. Какие из чисел 1, 2, 0, -1, -2 являются корнями уравнения:

а) $x^3+6x^2+5x-6=0$; в) $x^3+6x^2+11x+6=0$;

б) $x^3-x^2-6x=0$; г) $x^3+4x^2+x-6=0$?

364. Найдите корни уравнения:

а) $x^2=9$; б) $x^2=0$; в) $|x|=5$; г) $|x|=0$.

Б

365. Докажите, что:

а) корнем уравнения $3x-6=3(x-2)$ является любое число;

б) уравнение $3y-5=1+3y$ не имеет корней.

366. Объясните, почему уравнение не имеет корней:

а) $x^2=-1$; б) $|x|=-5$; в) $x^6+1=0$; г) $|x|+10=0$.

367. Проверьте, что число 10 является корнем уравнения $|x|=x$, а число -10 его корнем не является. Укажите еще несколько

корней этого уравнения. Что представляет собой множество корней уравнения $|x| = x$?

368. Укажите множество корней уравнения $|x| = -x$.

4.3 Решение уравнений

Чтобы решить уравнение, мы будем *преобразовывать* его в другое уравнение более простого вида, которое имеет то же множество корней, что и исходное.

Правила преобразования уравнений являются следствиями очевидных свойств числовых равенств:

если $a = b$, то $a + c = b + c$ и $a - c = b - c$;

если $a = b$, то $ac = bc$ и $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ $(c \neq 0)$.

Словами эти свойства можно описать так: числовое равенство не нарушится, если к обеим его частям прибавить одно и то же число, или если от обеих его частей отнять одно и то же число, или если обе его части умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

Рассмотрим два основных правила преобразования уравнений на примере решения уравнения

$$2x = 10 - 3x.$$

Множество корней этого уравнения не изменится, если его заменить уравнением

$$2x + 3x = 10 - 3x + 3x,$$

которое получается путем прибавления к обеим частям исходного уравнения выражения $3x$. Заменив нулем сумму выражений $-3x$ и $3x$, получим уравнение

$$2x + 3x = 10.$$

Сравните получившееся уравнение и исходное. В результате проведенного преобразования слагаемое $-3x$ оказалось в другой части уравнения, при этом его знак изменился с «минуса» на «плюс». Отсюда понятно правило:

в уравнении можно перенести слагаемое из одной части в другую, изменив при этом его знак на противоположный.

Продолжим решение уравнения $2x + 3x = 10$. Упростим его левую часть. Получим уравнение

$$5x = 10.$$

Из свойств числовых равенств следует еще одно правило преобразования уравнений:

> обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

При этом множество корней уравнения не изменится.

Разделив обе части уравнения $5x = 10$ на 5, найдем x:

$$x = 2.$$

Таким образом, уравнение $2x = 10 - 3x$ имеет корень, равный 2.

Заметим, что первый прием преобразования уравнений описал знаменитый арабский математик Мухаммед аль-Хорезми, живший в в Хорезме и в Багдаде на рубеже IX и X вв. Одно из главных сочинений аль-Хорезми называлось «Китаб аль-джебр вальмукабала», что в переводе с арабского означает «Книга о восстановлении и противопоставлении». Перенося члены уравнения из одной части в другую, мы в одной части их «уничтожаем», но зато в другой «восстанавливаем», меняя при этом их знаки на противоположные. Восстановление — по-арабски *аль-джебр*. От этого слова и произошло название — **алгебра**. Алгебра, которую вы теперь изучаете, возникла и развивалась много веков тому назад именно как наука о решении уравнений.

Рассмотрим примеры решения уравнений.

■ Пример 1. Решим уравнение $\frac{1}{3}x - 1 = 4$.

Воспользовавшись первым правилом, соберем числа в правой части уравнения. Получим

$$\frac{1}{3}x = 4 + 1,$$

$$\frac{1}{3}x = 5.$$

Воспользовавшись вторым правилом, умножим обе части уравнения на 3:

$$3 \cdot \frac{1}{3}x = 3 \cdot 5,$$

$$x = 15.$$

Корень уравнения — число 15.

■ Пример 2. Решим уравнение $3x - 5 = x + 1$.

Соберем члены уравнения, содержащие переменную, в одной части, а числа в другой:

$$3x - x = 1 + 5,$$

$$2x = 6.$$

Разделим обе части уравнения на 2:

$$x = 3.$$

Корень уравнения — число 3.

■ Пример 3. Решим уравнение $\frac{x}{4} = 1 + \frac{2x}{3}$.

Вычисления с целыми числами проще, чем с дробями, поэтому прежде всего избавимся от дробей. Для этого умножим обе части уравнения на наименьшее общее кратное знаменателей дробей, т. е. на 12. Получим

$$\frac{x}{4} \cdot 12 = \left(1 + \frac{2x}{3}\right) \cdot 12,$$

$$\frac{x}{4} \cdot 12 = 12 + \frac{2x}{3} \cdot 12,$$

$$3x = 12 + 8x,$$

$$-5x = 12,$$

$$x = -2{,}4.$$

Каждое из уравнений, которые мы решали, в результате преобразований приводилось к виду $ax = b$. (Вернитесь к примерам: у нас получались уравнения $\frac{1}{3}x = 5$, $2x = 6$, $-5x = 12$.)

Уравнение вида $ax = b$, где a и b — числа, а x — переменная, называют линейным.

В рассмотренных линейных уравнениях коэффициент a при переменной отличен от нуля. Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственный корень, равный $\frac{b}{a}$.

A

Решите уравнение (**369—372**).

369. а) $x + 23 = 50$; б) $8 + z = 17$; в) $y + 16 = -18$; г) $u - 25 = 0$; д) $x - 31 = 12$; е) $t - 20 = -5$; ж) $9 + y = 23$; з) $x + 30 = -14$; и) $t - 7 = 16$; к) $2 + z = 0$; л) $x - 3 = -8$; м) $u - 4 = -4$.

370. а) $4x = 60$; б) $15y = 90$; в) $10z = 17$; г) $5u = -7$; д) $6y = -18$; е) $-2x = 6$; ж) $-8t = -2$; з) $12t = 0$; и) $-z = -8$; к) $4x = 3$; л) $5t = -10$; м) $15y = -3$.

371. а) $3x = 1{,}2$; б) $6z = -5{,}4$; в) $-5y = 10{,}5$; г) $-2{,}5x = 2{,}5$; д) $1{,}2y = 1{,}2$; е) $0{,}1z = 4{,}2$.

372. а) $2x = \frac{4}{7}$; б) $-10z = \frac{2}{5}$; в) $3x = -\frac{1}{3}$; г) $-5y = -2\frac{1}{2}$; д) $-\frac{1}{3}x = 4$; е) $\frac{4}{5}z = -20$; ж) $\frac{1}{4}x = \frac{1}{2}$; з) $\frac{2}{9}y = 0$; и) $-\frac{2}{7}z = -\frac{2}{7}$; к) $2x = -\frac{1}{3}$; л) $\frac{1}{8}y = 4$; м) $-6u = \frac{2}{3}$.

Найдите корень уравнения (373—374).

373. а) $3x + 14 = 35$; д) $27 = 6y + 39$; и) $31 - 2z = 15$;
б) $15 + x = 0$; е) $40 = 12 - z$; к) $7 - y = 15$;
в) $\frac{1}{2}x + 9 = 17$; ж) $1{,}5x - 3 = 2$; л) $3 + 0{,}1x = 4$;
г) $8 + \frac{2}{3}y = 14$; з) $5 - 0{,}2z = 1$; м) $1{,}2t + 0{,}4 = 1$.

374. а) $2x + 3x + 4 = 14$; г) $-10 + x + x = -26$;
б) $7z - z + 5 = 11$; д) $10y - 3y - 9 = 40$;
в) $8y - 4y - 12 = -50$; е) $-y + 8 - 14y = 23$.

Решите уравнение (375—377).

375. а) $3y = 6 + 2y$; в) $z = 6 - 5z$; д) $3x - 16 = 7x$;
б) $6x = 4x + 10$; г) $9 + y = 4y$; е) $7z + 9 = 4z$.

376. а) $x + 2 = 4 - x$; г) $2x + 3 = 3x - 7$; ж) $10x + 7 = 8x - 9$;
б) $3x + 1 = 5x - 3$; д) $9x - 2 = 5x - 2$; з) $53 - 6x = 4x - 17$;
в) $2x - 3 = 2 - 3x$; е) $10 - 3x = 2x - 15$; и) $8 + 2x = 16 + x$.

377. а) $10 - 7x = 7 - x$; г) $2{,}5z - 3 = z - 4{,}5$;
б) $t + 6{,}8 = 9t + 10$; д) $3x + 5 = 0{,}5x + 10$;
в) $1 + 2{,}6z = 6 + 3z$; е) $2{,}6 + 2x = 1{,}9x + 6{,}6$.

Решите уравнение (378—379).

378. а) $5y + (8y + 9) = 100$; г) $x + (x + 1) + (x + 2) = 9$;
б) $x - (50 - x) = 12$; д) $(z - 2) + (z - 1) + z = -3$;
в) $(18 - 3x) - (4 + 2x) = -6$; е) $21 + (20 - 4x) - (11 - 2x) = 0$.

379. а) $4(x - 7) = 3x + 5$; г) $2u - 3(7 - 2u) = 3$;
б) $-5x + 3(3 + 2x) = 7$; д) $12 - y = 5(4 - 2y) + 10$;
в) $30 - x = 3(20 - x)$; е) $2 - 2(x - 8) = 4x - 4$.

Найдите корень уравнения (380—382).

380. а) $\frac{1}{3}y + 2 = 1$; г) $3 - \frac{5}{7}t = 1 - \frac{3}{7}t$;
б) $\frac{1}{5}x + 11 = 1 - \frac{3}{5}x$; д) $\frac{1}{8}u - 2 = \frac{5}{8}u + 1$;
в) $8 - \frac{1}{4}z = 1$; е) $\frac{2}{5}z - 7 = 3$.

381. а) $\frac{y}{2} - 3 = 6$; г) $\frac{u}{5} + \frac{3u}{5} = 4$; ж) $4 - \frac{u}{5} = \frac{4}{5}$;
б) $\frac{z}{3} + 8 = \frac{2z}{3}$; д) $\frac{x}{4} - 1 = 11$; з) $\frac{z}{10} + 1 = -10$.
в) $5 + \frac{x}{3} = -1$; е) $\frac{3y}{2} + 5 = \frac{y}{2}$;

382. а) $\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=1$; в) $\frac{y}{2}-\frac{y}{7}=5$; д) $\frac{y}{3}=\frac{y}{2}-7$; ж) $\frac{z}{5}=\frac{z}{10}+1$;

б) $\frac{z}{8}-\frac{z}{4}=3$; г) $\frac{x}{5}-4=\frac{x}{3}$; е) $\frac{x}{2}-1=\frac{x}{3}-4$; з) $\frac{u}{2}-3=\frac{u}{4}+5$.

383. При каких значениях x:

а) значение выражения $-3x$ равно 3; 0; -1;

б) значение выражения $5x-6$ равно -6; 0; -1?

384. При каком значении переменной:

а) значение выражения $3y+4$ равно значению выражения $3-2y$;

б) значения выражений $4z-5$ и $14+5z$ противоположны?

385. Найдите значение переменной, при котором:

а) значение выражения $7+5x$ в 2 раза больше значения выражения $3x$;

б) значение выражения $2x-4$ в 3 раза меньше значения выражения $2x$;

в) значение выражения $8z+3$ на 10 больше значения выражения $4-2z$;

г) значение выражения $15-3x$ на 2 меньше значения выражения $2x+3$.

Б

386. Придумайте несколько уравнений, корнем каждого из которых является число: а) 6; б) -10; в) 0; г) $-\frac{1}{3}$.

387. Решите уравнение:

а) $\frac{x}{5}-\frac{x}{2}+\frac{x}{20}=1$; г) $\frac{x}{8}-\frac{x}{4}+\frac{x}{2}-x=1$;

б) $\frac{x}{2}-\frac{x}{12}=3-\frac{x}{3}$; д) $\frac{5x}{9}-\frac{2x}{3}-x=4$;

в) $\frac{x}{5}=\frac{x}{2}-\frac{x}{3}-4$; е) $\frac{3x}{4}-x=\frac{4x}{5}+x$.

388. Уравнение $6x=2(x+12)$ проще решить, если разделить обе его части на 2:

$$3x=x+12,$$
$$2x=12,$$
$$x=6.$$

Решите уравнение:

а) $3(x+5)=90$; г) $6(x-1)+3(5-x)=9$;

б) $2(x-6)=-34$; д) $4(3x-2)-4(x-2)=2$;

в) $-2(x+12)=6x$; е) $5(6+x)-5(2x+7)=0$.

389. Уравнение $\frac{1}{3}(x+8)=6$ можно решить, умножив на 3 обе его части:

$$3\cdot\frac{1}{3}(x+8)=6\cdot 3,$$
$$x+8=18,$$
$$x=10.$$

Решите уравнение:

а) $\frac{1}{5}(x+4)=3$;

б) $\frac{1}{4}(2y+1)=8$;

в) $-\frac{1}{7}(5u-7)=6$;

г) $\frac{2}{3}(10-c)=-8$;

д) $2t=1\frac{1}{3}(t+5)$;

е) $1\frac{1}{4}(x-2)=-5(x+1)$.

390. В древнеегипетском папирусе (1700 лет до н. э.) содержится решение уравнения, которое на языке современной математики можно записать так: $((x+\frac{2}{3}x)+\frac{1}{3}(x+\frac{2}{3}x))\cdot\frac{1}{3}=10$.
Решите это уравнение.

391. Запишите вместо c такое число, чтобы корнем получившегося уравнения было целое число:

а) $\frac{1}{8}x=c$; б) $0{,}1x=c$; в) $cx=15$; г) $cx=\frac{1}{3}$.

392. Решите уравнение относительно x:

а) $x-a=2$;

б) $1-x=c+2$;

в) $x+b=0$;

г) $a-x=b$;

д) $3x+m=0$;

е) $2x-a=b+x$;

ж) $4x+a=x+c$;

з) $c-3x=4-5x$.

393. Выразите из равенства каждую переменную через другие:

а) $a+2b-c=0$;

б) $m+n-2c=1$;

в) $\frac{1}{3}(a+b+c)=1$;

г) $2(x+y)=4z$.

4.4 Решение задач с помощью уравнений

Перевести условие задачи на язык математики можно по-разному, поэтому и уравнения получаются разные. Как правило, лучше сделать наиболее простой перевод.

Составить по условию задачи наиболее простое уравнение помогают некоторые практические правила.

■ З а д а ч а. На двух складах было 1840 т угля. Затем на первом складе запас угля удвоили, а на второй привезли еще 120 т, и тогда на втором складе стало на 620 т меньше, чем на первом. Сколько стало угля на каждом складе?

Какую величину здесь целесообразно обозначить буквой x? Часто в качестве неизвестного выбирают искомую величину, т. е. то, что требуется найти в задаче. Это можно сделать и в данном случае. Однако если через x обозначить количество угля, которое оказалось, например, на первом складе, то дальше при решении уравнения придется иметь дело не с целыми числами, а с дробями.

Но в качестве неизвестного совсем не обязательно выбирать именно то, что требуется найти в задаче. Поэтому, руководствуясь неформальным, но мудрым правилом: «Целое лучше дроби», обозначим через x т *исходное* количество угля на первом складе.

Выразим через x другие величины.

На первом складе запас угля удвоили, т. е. там стало $2x$ т угля.

По условию на втором складе было $1840 - x$ т угля, а затем стало $(1840 - x) + 120$ т.

Известно, что на втором складе оказалось на 620 т угля меньше, чем на первом. Составим уравнение:

$$2x - ((1840 - x) + 120) = 620.$$

Решим это уравнение:

$$2x - 1840 + x - 120 = 620,$$
$$3x = 2580,$$
$$x = 860.$$

Теперь ответим на вопрос задачи: на первом складе стало $860 \cdot 2 = 1720$ т угля, а на втором складе стало $1720 - 620 = 1100$ т.

Заметим, что условие «на втором складе угля стало на 620 т меньше, чем на первом» можно было бы перевести на язык уравнений так:

$$2x = ((1840 - x) + 120) + 620.$$

При этом мы следовали бы другому мудрому правилу: «Плюс лучше минуса».

А

Решите задачу, обозначив буквой наименьшую из неизвестных величин (**394—396**).

394. а) Первое число на 27 больше второго, а их сумма равна 95. Найдите эти числа.

б) Одно из чисел втрое больше второго, а разность этих чисел равна 62. Найдите большее из этих чисел.

395. а) Сумма трех слагаемых равна 80. Первое слагаемое в 2 раза больше второго, а второе слагаемое в 3 раза больше третьего. Найдите каждое слагаемое этой суммы.

б) Сумма трех чисел равна 192. Первое число в 5 раз меньше второго, а второе в 2 раза меньше третьего. Найдите каждое из чисел.

396. (*Старинная задача.*) Трое подмастерьев хотели купить дом за 204 гульдена. На покупку первый дал втрое больше денег, чем второй, а второй дал вчетверо больше, чем третий. Сколько гульденов внес каждый из подмастерьев?

Решите задачу **(397—403)**.

397. а) На дорогу от дома до работы и обратно у Андрея уходит 90 мин. Обратный путь занимает у него на 10 мин больше, чем путь на работу. Сколько минут Андрей добирается до работы и сколько минут он едет домой?

б) На выборах в городскую администрацию за двух кандидатов проголосовало 600 человек. Один из них получил на 120 голосов больше, чем другой. Сколько голосов получил каждый?

398. а) Бронза — это сплав олова и меди. Сколько олова и меди содержится в куске бронзы, масса которого 80 кг, если олово и медь входят в нее в отношении 3 : 17?

б) Сколько соли и сколько воды содержится в 200 г раствора соли, если соль и вода входят в него в отношении 1 : 4?

399. а) Мальчики составляют $\frac{2}{3}$ всех учащихся школы. Сколько в школе учащихся, если в ней учится 456 мальчиков?

б) Масса котенка 0,6 кг. Она составляет 0,4 массы щенка. Определите массу щенка.

400. а) Одно число составляет $\frac{4}{5}$ другого числа, а их сумма равна 108. Найдите эти числа.

б) Одно число составляет 45% другого. Найдите эти числа, если одно из них на 66 больше другого.

401. а) Ученик прочитал 144 страницы, что составляет 36% числа всех страниц в книге. Сколько страниц в книге?

б) Масса сушеных яблок составляет 16% массы свежих яблок. Сколько надо взять свежих яблок, чтобы получить 80 кг сушеных?

402. а) Велосипедист за 3 ч проезжает то же расстояние, что пешеход проходит за 9 ч. Определите скорость каждого, если известно, что скорость велосипедиста на 8 км/ч больше скорости пешехода.

б) Автобус едет от одного города до другого со скоростью 50 км/ч, а автомобиль — со скоростью 80 км/ч, и весь путь занимает у него на 1,5 ч меньше, чем у автобуса. Определите время, за которое автобус проходит расстояние между городами.

403. а) В 12 ящиков можно разложить такое же количество яблок, что и в 18 корзин. Определите, сколько килограммов яблок вмещает ящик и сколько корзина, если известно, что в ящик вмещается на 3 кг яблок больше, чем в корзину.
б) Имеющиеся конфеты разложили в коробки по 10 штук в каждую и в пакеты по 8 штук в каждый. Коробок получилось на 4 меньше, чем пакетов. Определите, сколько получилось коробок, если известно, что во всех коробках вместе упаковано столько же конфет, сколько во всех пакетах.

Решите задачу, составив уравнение двумя способами (**404—405**):

1) обозначив буквой искомое расстояние;
2) обозначив буквой время движения в каком-либо направлении.

404. Андрей доехал на велосипеде от реки до деревни и вернулся обратно, затратив на весь путь 1 ч. От реки до деревни он ехал со скоростью 10 км/ч, а на обратном пути его скорость была 15 км/ч. Чему равно расстояние от реки до деревни?

405. Петр прошел от дома до пристани и вернулся обратно, затратив на весь путь 1 ч. От дома до пристани он шел со скоростью 4 км/ч, а на обратном пути его скорость была 6 км/ч. Чему равно расстояние от дома до пристани?

Решите задачу, составив уравнение двумя способами (**406—407**):

1) обозначив буквой какую-нибудь скорость движения;
2) обозначив буквой искомое расстояние.

406. От города до поселка мотоциклист доехал за 3 ч. Если бы он увеличил скорость на 25 км/ч, то проехал бы это расстояние за 2 ч. Чему равно расстояние от города до поселка?

407. От станции до озера турист доехал на велосипеде за 2 ч. Пешком он мог бы пройти это расстояние за 6 ч. Чему равно расстояние от станции до озера, если на велосипеде турист едет со скоростью, на 10 км/ч большей, чем идет пешком?

Решите задачу, обозначив буквой удобную для составления уравнения величину (**408—412**).

408. Дорога от дома до школы и обратно занимает у Ольги $\frac{1}{2}$ ч. В школу она идет со скоростью 6 км/ч, а обратно — со скоростью 3 км/ч. Чему равно расстояние от дома до школы?

409. Велосипедист первую половину пути проехал за 3 ч, а вторую половину пути — за 2 ч, так как увеличил скорость на 4 км/ч. Какое расстояние проехал велосипедист?

410. От железнодорожной станции до турбазы туристы шли со скоростью 4 км/ч. Обратно они ехали на велосипедах со скоростью 12 км/ч и затратили на дорогу на 4 ч меньше. Чему равно расстояние от станции до турбазы?

411. Половину всех имеющихся орехов упаковали в большие пакеты по 500 г в каждый, а вторую половину — в маленькие пакеты по 300 г в каждый. Всего получилось 16 пакетов. Сколько было орехов?

412. Все имеющиеся апельсины можно разложить в 3 пакета или в 5 коробок. Сколько килограммов апельсинов имеется, если в пакет вмещается на 2 кг апельсинов больше, чем в коробку?

Б

Решите задачу (**413—419**).

413. а) Существуют ли три последовательных четных числа, сумма которых равна 74?

б) Существуют ли три последовательных нечетных числа, сумма которых равна 69?

414. а) В саду растут яблони, груши и сливы, всего 130 деревьев. Определите, сколько в саду деревьев каждого вида, если известно, что яблонь в 3 раза больше, чем груш, а слив на 10 больше, чем груш.

б) Купили карандаши, кисти и линейки, всего 43 штуки. Линеек купили на 7 штук меньше, чем кистей, и в 4 раза меньше, чем карандашей. Сколько купили карандашей, кистей и линеек в отдельности?

415. а) Для трех аквариумов требуется 61 л воды. Первый аквариум вмещает воды в 1,5 раза больше, чем третий, а второй — на 5 л больше, чем третий. Сколько литров воды вмещает каждый аквариум?

б) Продавец разложил гречневую крупу в четыре пакета. В первый пакет он насыпал в 1,5 раза больше крупы, чем во второй, а еще в каждый из двух пакетов, т. е. в третий и четвертый, — на 0,5 кг больше, чем во второй. Сколько килограммов гречневой крупы в каждом пакете, если масса всех четырех пакетов вместе 14,5 кг?

416. а) Из поселка в город одновременно выехали мотоциклист со скоростью 40 км/ч и велосипедист со скоростью 10 км/ч. Определите, какое время затратил на путь велосипедист, если известно, что он прибыл в город на 1,5 ч позже мотоциклиста.
б) Из туристического лагеря к станции вышел пешеход со скоростью 4 км/ч. Через час вслед за ним выехал велосипедист со скоростью 10 км/ч. Он приехал на станцию на 0,5 ч раньше пешехода. Определите расстояние от туристического лагеря до станции.

417. а) На одном и том же расстоянии маленький обруч делает 15 оборотов, а большой — 9 оборотов. Длина окружности маленького обруча на 2 м меньше длины окружности большого обруча. Определите длину окружности каждого обруча.
б) Длина окружности маленького обруча 3 м, а большого — 4 м. На одном и том же расстоянии маленький обруч делает на 10 оборотов больше, чем большой. Определите это расстояние.

418. Провод длиной 9,9 м разрезали на две части. Определите длину каждой части, если известно, что: а) одна из них на 20% короче другой; б) одна из них на 20% длиннее другой.

419. а) Когда цену товара увеличили на 30%, он стал стоить 52 р. Определите первоначальную стоимость товара.
б) Цена товара сначала выросла на 20%, а затем снизилась на 15%, после чего товар стал стоить 102 р. Какова была первоначальная стоимость товара?

Решите задачу арифметическим, а потом алгебраическим способом **(420—421)**.

420. Дима выиграл набор коллекционных марок; $\frac{1}{5}$ этого набора он подарил брату, $\frac{1}{6}$ — сестре, а остальные 19 марок оставил себе. Сколько марок было в наборе?

421. Из корзины отсыпали половину орехов, потом еще половину остатка, затем половину нового остатка и, наконец, половину следующего остатка. После этого в корзине осталось 10 орехов. Сколько орехов было в корзине первоначально?

Решите *старинную задачу* **(422—425)**.

422. Летела стая гусей, навстречу им летит один гусь и говорит: «Здравствуйте, сто гусей!» «Нас не сто гусей, — ответил ему вожак стаи, — если бы нас было столько, сколько теперь, да еще столько, да полстолько, да четверть столько, да еще ты, гусь, с нами, так тогда нас было бы сто гусей». Сколько было в стае гусей?

423. У Пифагора однажды спросили, сколько у него учеников. «Половина моих учеников изучает прекрасную математику, четверть исследует тайны природы, седьмая часть упражняет силу духа. Добавьте еще к ним трех юношей, из коих Теон самый способный». Сколько было учеников у Пифагора?

424. После того как путник прошел 3 версты и еще треть оставшегося пути, ему осталось пройти половину пути и еще 1 версту. Какой путь осталось пройти путнику?

425. Трое мужчин пришли к парикмахеру. Побрив первого, парикмахер сказал: «Посмотри, сколько денег в ящике стола, положи еще столько же и возьми два рубля сдачи». То же сказал парикмахер и второму, и третьему. Когда они ушли, оказалось, что в ящике денег нет. Сколько денег было в ящике первоначально?

4.5 Некоторые неалгоритмические приемы решения уравнений

(Для тех, кому интересно)

Уравнения, которые мы рассматривали, решаются с помощью довольно простого *алгоритма*, т. е. такого метода, который требует лишь точного выполнения известных правил. Однако при переводе условия задачи на математический язык может получиться уравнение, алгоритм решения которого вы еще не знаете или его вообще нет.

Рассмотрим некоторые неалгоритмические приемы решения уравнений. Обычно такие приемы труднее, чем алгоритмические, — ведь здесь приходится думать самому, а не пользоваться готовыми правилами.

■ Пример 1. Фирма заказала 143 компьютера, чтобы распределить их поровну между своими филиалами. Однако потом фирма решила открыть еще два филиала, и в результате каждый филиал получил на 2 компьютера меньше. Сколько у фирмы стало филиалов?

Обозначим исходное число филиалов буквой x. Тогда по условию задачи каждый филиал должен был получить $\frac{143}{x}$ компьютеров. Но филиалов стало $x+2$, значит, каждый филиал реально получил $\frac{143}{x+2}$ компьютера. По условию задачи каждый филиал получил на 2 компьютера меньше. Составим уравнение:

$$\frac{143}{x} = \frac{143}{x+2} + 2.$$

Уравнение совсем непростое, но его можно решить, если вспомнить, что x — это количество филиалов фирмы, и, значит, это число натуральное. Кроме того, $\frac{143}{x}$ и $\frac{143}{x+2}$ тоже натуральные числа, поскольку каждое из них — это количество компьютеров. Поэтому числа x и $x+2$ — это делители числа 143. Остается найти все натуральные делители числа 143 и выбрать такие два делителя, один из которых на 2 больше другого.

У числа 143 всего четыре натуральных делителя: 1, 11, 13, 143. Перебрав все возможные пары делителей, нетрудно увидеть, что условию удовлетворяет только пара чисел 11 и 13.

Значит, $x = 11$, а $x + 2 = 13$.

Таким образом, у фирмы стало 13 филиалов.

■ Пример 2. Андрей задумал некоторое натуральное число. Борис предложил ему возвести это число в квадрат, после чего прибавить задуманное число и назвать результат. Результат оказался равным 90. Как Борису узнать, какое число задумал Андрей?

Обозначим задуманное число буквой x. Тогда Андрей, следуя указаниям Бориса, вычислил значение выражения $x^2 + x$ и получил по условию число 90. Мы пришли к уравнению

$$x^2 + x = 90.$$

Попробуем решить это уравнение. Выражение $x^2 + x$ с помощью распределительного закона можно представить в виде произведения:

$$x^2 + x = x \cdot x + 1 \cdot x = x(x+1).$$

Следовательно, наше уравнение можно заменить таким:

$$x(x+1) = 90.$$

Теперь ясно, что надо найти натуральное число x такое, что при умножении его на следующее натуральное число в произведении получится 90.

Такие два натуральных числа нетрудно подобрать — это 9 и 10. Значит, $x = 9$.

Кажется, что задача решена, однако это не так. Вдруг есть еще какое-нибудь натуральное число, удовлетворяющее условию $x(x+1) = 90$? Ведь в данном случае мы не перебирали все возможные варианты решения, а просто подобрали ответ.

Чтобы убедиться в том, что другого такого числа нет, надо провести дополнительные рассуждения. Например, такие: если $x > 9$, то $x + 1 > 10$, и тогда произведение $x(x + 1)$ больше 90. Точно так же x не может быть меньше 9, потому что в этом случае произведение будет меньше 90. Значит, могло быть задумано только число 9.

Итак, подбор одного или даже нескольких корней вовсе не означает, что нет других. Необходимо провести дополнительные рассуждения, чтобы проверить, что найдены все возможные решения. Такие рассуждения могут оказаться очень непростыми, и это ограничивает применение метода подбора для решения уравнений.

426. Найдите натуральный корень уравнения:

а) $x(x - 1) = 6$; б) $x^2 + x = 12$.

427. Найдите все целые корни уравнения:

а) $x(x + 2) = 35$; б) $x^2 + x = 6$.

428. Найдите целые корни уравнения $(x - 1)^2 + x^2 = 25$.

429. Найдите натуральные корни уравнения

$$\frac{6}{x-1} + \frac{6}{x} + \frac{6}{x+1} = 11.$$

430. Периметр прямоугольника, стороны которого выражены целым числом сантиметров, равен 28 см. Может ли его площадь быть равной 33 см^2? 40 см^2?

431. Несколько шахматистов участвовало в турнире, в котором каждый участник сыграл с каждым другим одну партию. Сколько шахматистов участвовало в турнире, если всего было сыграно 28 партий?

ДЗ Дополнительные задания к главе 4

Решение уравнений

Решите уравнение (432—437).

432. а) $12x - \frac{3}{4} = 0$; в) $0,7x + \frac{1}{5} = 0$;

б) $0,8 + \frac{1}{4}x = 0$; г) $\frac{2}{5} - 10x = 0$.

433. а) $3x + 6 = 5(x - 1) + 10$; в) $12x - (7 - 3x) = 4x$;
б) $4(1 - x) = 3(2x + 3)$; г) $8x + 3 = 1 - (2x + 4)$.

434. а) $0{,}7(x - 5) = x - 0{,}1$; в) $9 - x = 0{,}4(3x - 5)$;
б) $1{,}5(x - 6) = 1{,}4(x + 5)$; г) $1{,}6(5 - x) = 1{,}5(4 - x)$.

435. а) $2x - (5 - (3x + 4)) = x - 5$; б) $x - 2 - (3 + (7 - 2x)) = -6$.

436. а) $1 - \frac{x}{6} + \frac{x}{10} = 0$; в) $\frac{x}{6} - 2 = \frac{x}{4} + 1$;
б) $4 - \frac{2x}{3} + \frac{x}{6} = 0$; г) $\frac{x}{4} + 2 = \frac{x}{10} - 1$.

437. а) $\frac{x}{3} + \frac{3x}{5} = 4 - \frac{x}{15}$; б) $5 - \frac{x}{2} - \frac{x}{4} = x + \frac{x}{3}$.

438. Имеет ли корни уравнение:
а) $3(5 - 2x) = 1 + 2(7 - 3x)$; б) $2(4 - 3x) = 6 - 3(2x - 1)$?

Решение задач

Решите задачу с помощью уравнения (**439—448**).

439. В одном килограмме компота из сухофруктов груш на 100 г больше, чем изюма, и в 3 раза меньше, чем чернослива. Сколько в компоте изюма, чернослива и груш в отдельности?

440. В три коробки надо разложить 55 мячей так, чтобы в первой было мячей в 3 раза больше, чем во второй, а в третьей — на 5 мячей больше, чем во второй. Сколько мячей будет в каждой коробке?

441. Сумму в 2880 р., отведенную на покупку спортивного инвентаря для школы, распределили следующим образом: на футбольные и волейбольные мячи денег выделили поровну, а на гимнастические скакалки — 20% суммы, выделенной на все мячи. Сколько рублей выделено на каждый вид инвентаря?

442. За два художественных альбома заплатили 344 р., причем один альбом стоил на 15% дороже, чем другой. Определите цену каждого альбома.

443. Фотоаппарат дороже фотопленки в 12 раз. Сколько стоит фотоаппарат и сколько фотопленка, если за 2 фотоаппарата и 6 фотопленок заплатили 2250 р.?

444. Несколько друзей хотят купить волейбольный мяч. Если каждый из них даст по 20 р., то на покупку не хватит 40 р. Если же каждый даст 30 р., то у них останется 60 р. Сколько было друзей? Сколько стоит мяч?

445. В магазине смешали конфеты по 110 р. и по 150 р. за килограмм и получили смесь по 120 р. за килограмм. Сколько конфет того и другого сорта содержится в килограмме смеси?

446. Дима сказал: «Толя в 2 раза старше меня. В то же время я на 4 года младше Коли, а Коля на 4 года младше Толи». Сколько лет Диме?

447. а) Антон младше своего брата на 4 года и в 5 раз младше своей матери. А его брат в 4 раза младше отца. Сколько лет каждому из братьев, если всем четверым вместе 86 лет?
б) Ольга младше своего мужа на 8 лет. Ее сын старше ее дочери на 5 лет и младше Ольги в 4 раза. Сколько лет каждому, если всем четверым вместе 73 года?

448. а) Брат старше сестры в 3 раза, а через 10 лет он будет старше сестры в 2 раза. Сколько лет брату, сколько сестре?
б) Отец старше сына на 24 года, а через 5 лет он будет старше сына в 4 раза. Сколько лет отцу, сколько сыну?

? Вопросы для повторения к главе 4

1. Что называется корнем уравнения? Что значит «решить уравнение»?
2. Сформулируйте два основных правила преобразования уравнений.
3. Опишите по шагам решение уравнения $5(x - 4) = 3x + 10$.
4. Какое уравнение называется линейным? Приведите пример линейного уравнения.
5. Разъясните суть алгебраического метода решения задач на примере следующей задачи:
Ученик задумал число, умножил его на 4, из результата вычел 5 и получил удвоенное задуманное число. Какое число задумал ученик?

? Задания для самопроверки к главе 4

(Обязательные результаты обучения)

1. Какие из чисел −3, −2, −1, 1, 2, 3 являются корнями уравнения

$$x^2 + 2x - 3 = 0?$$

Решите уравнение (2—9).

2. $-8x = 3{,}2$.

3. $\frac{2}{3}x = 6$.

4. $4 - 5x = 0$.

5. $10x + 7 = 3$.

6. $3 - 4x = x - 12$.

7. $(x + 7) - (3x + 5) = 2$.

8. $3(2x - 1) + 12 = x$.

9. $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 7$.

Решите задачу с помощью уравнения (10—12).

10. К Новому году учащиеся первого и второго классов сделали 150 елочных игрушек, причем второклассники сделали на 16 игрушек больше, чем первоклассники. Сколько игрушек сделали первоклассники и второклассники по отдельности?

11. Купили 165 билетов в театр и цирк, причем билетов в театр в 2 раза больше, чем в цирк. Сколько купили театральных билетов и сколько билетов в цирк?

12. В седьмых классах школы учатся 48 человек, что составляет 8% всех учащихся школы. Сколько всего учеников в школе?

? Тест к главе 4

1. Корнями какого уравнения являются числа 2 и −1?

А. $x^2 - 3x + 2 = 0$.
В. $x^2 - x - 2 = 0$.
Б. $x^2 + 3x + 2 = 0$.
Г. $x^2 + x - 2 = 0$.

2. Соотнесите каждое уравнение с числом его корней:

$x^2 = 4$	один корень
$2x - (x - 3) = 0$	два корня
$3x - 6 - 3(x - 2) = 0$	нет корней
$\lvert x\rvert + 4 = 0$	бесконечно много корней

3. Решите уравнение $15 - x = 2(x - 30)$.

Ответ. ____________

4. Решите уравнение $5(2x - 1) - 4(3x + 1) = 2$.

А. −5,5. Б. −4. В. −1,5. Г. 0.

5. Каким числом является корень уравнения $\frac{x}{5} - \frac{1}{2} = \frac{x}{4}$?

А. Целым положительным.
В. Дробным положительным.
Б. Целым отрицательным.
Г. Дробным отрицательным.

6. В три коробки надо разложить 65 мячей так, чтобы в первой было мячей в 3 раза больше, чем во второй, а в третьей — на 5 мячей меньше, чем в первой. Сколько мячей должно быть в каждой коробке?

Если число мячей во второй коробке обозначено буквой x, то какое уравнение соответствует условию задачи?

А. $3x + x + (3x + 5) = 65$. **В.** $(x + 3) + x + (x - 5) = 65$.
Б. $3x + x + (x - 5) = 65$. **Г.** $3x + x + (3x - 5) = 65$.

7. В двух баках было одинаковое количество воды. Когда в первый бак долили 20 л воды, а из второго отлили 15 л воды, то в первом баке воды стало в 2 раза больше, чем во втором. Сколько воды было в каждом баке первоначально?

Какое уравнение соответствует условию задачи, если буквой x обозначено первоначальное количество воды в баках?

А. $x + 20 = 2(x - 15)$. **В.** $2x + 20 = x - 15$.
Б. $2(x + 20) = x - 15$. **Г.** $x + 20 = 2x - 15$.

8. За игрушку в подарочной упаковке заплатили 324 р. Стоимость упаковки составила 8% от стоимости игрушки. Сколько стоит игрушка?

Ответ. ____________

9. В какое уравнение нельзя преобразовать уравнение

$$16x = 12(x - 3)?$$

А. $8x = 6(x - 3)$. **В.** $4x = 3x - 3$.
Б. $16x = 12x - 36$. **Г.** $3(x - 3) = 4x$.

10. Дано уравнение $ax = 3$, где a — некоторое число, x — переменная. Найдите a, если известно, что корень уравнения равен $\frac{2}{3}$.

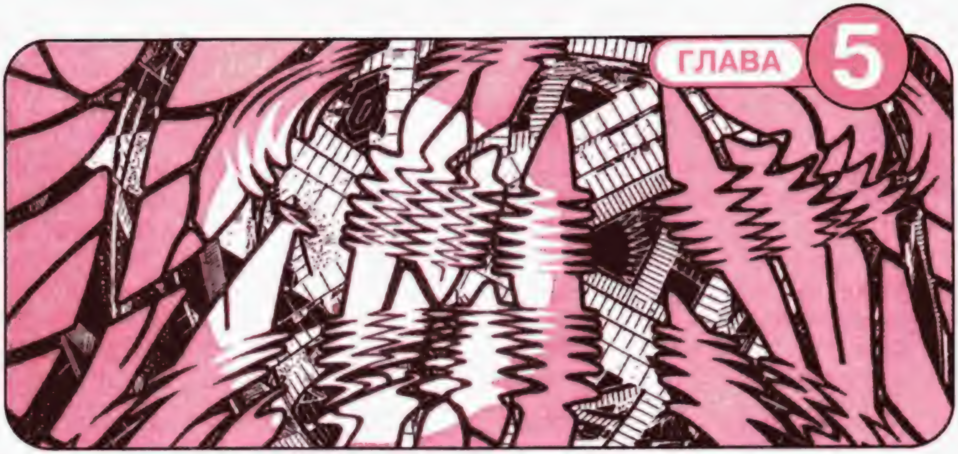
А. $a = 2$. **Б.** $a = \frac{2}{9}$. **В.** $a = 4{,}5$. **Г.** $a = 0{,}5$.

11. Решите уравнение $2a - b + 4x = c$ относительно x.

А. $x = \frac{2a - b + c}{4}$. **В.** $x = 4(c - 2a + b)$.
Б. $x = \frac{c - 2a + b}{4}$. **Г.** $x = \frac{c - 2a - b}{4}$.

12. При каком значении x значения выражений $8x - 15$ и $2x - 10$ противоположны?

А. При $x = -2{,}5$. **Б.** При $x = 2{,}5$. **В.** При $x = \frac{5}{6}$. **Г.** При $x = \frac{25}{9}$.



Координаты и графики

5.1 Множества точек на координатной прямой

Как вы уже знаете, числа можно изображать точками на координатной прямой. Для этого на прямой необходимо выбрать начало отсчета, положительное направление и единичный отрезок. Тогда каждому числу будет соответствовать некоторая точка прямой. Число в таком случае называют **координатой** этой точки.

Например, точки A, B, C, D, изображенные на рисунке 5.1, имеют соответственно координаты 2, $\frac{1}{3}$, 0, $-0{,}7$ — это их «адреса» на координатной прямой. Напомним, что координата точки записывается в скобках: $A(2)$, $B(\frac{1}{3})$, $C(0)$, $D(-0{,}7)$.

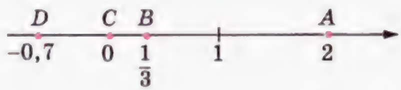


Рис. 5.1

Соответствие между числами и точками прямой для математиков настолько привычно, что часто число и изображающую его точку не различают и вместо «точка имеет координату $\frac{1}{3}$» говорят просто: «точка $\frac{1}{3}$».

Рассмотрим множество точек координатной прямой, имеющих координату, большую 3, а значит, расположенных правее точки 3 (рис. 5.2). Такое множество точек называют **открытым лучом.** Так же называют и соответствующее множество чисел. Слово «луч»

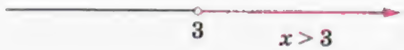


Рис. 5.2

Рис. 5.3

подсказано геометрией, а открытым его называют потому, что граничная точка 3 ему не принадлежит (на рисунке такую точку обозначают светлым кружком). На языке алгебры это множество можно задать неравенством $x > 3$: если в это неравенство вместо переменной x подставить координату любой точки, принадлежащей лучу, получится верное числовое неравенство; если же вместо x подставить координату точки, не принадлежащей лучу, то получится неверное числовое неравенство.

Пусть теперь рассматриваемому множеству точек принадлежит и граничная точка 3 (рис. 5.3). Такое множество точек (как и соответствующее множество чисел) называют **замкнутым лучом**. Этот луч можно задать неравенством $x \geqslant 3$. Запись $x \geqslant 3$ читают так: «x больше или равно 3». Но можно сказать и по-другому: «x не меньше 3» («не меньше» — это отрицание «меньше»).

Неравенствами $x < 3$ и $x \leqslant 3$ также задаются лучи — открытый и замкнутый. Они изображены на рисунке 5.4, *а*, *б*. Вы, наверное, догадались, что знак $\leqslant$ читается как «меньше или равно»; его также можно прочитать и как «не больше».

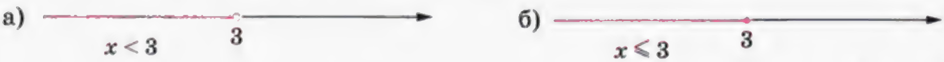


Рис. 5.4

Множество точек, изображенное на рисунке 5.5, как и соответствующее ему множество чисел, называют **интервалом**. Любая точка этого интервала лежит правее точки -1 и левее точки 2. Значит, любая точка этого интервала удовлетворяет сразу двум неравенствам: $x > -1$ (или, что то же самое, $-1 < x$) и $x < 2$. Такие два неравенства обычно записывают в виде двойного неравенства $-1 < x < 2$.

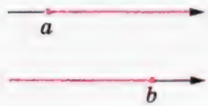
Множество, изображенное на рисунке 5.6, задаваемое двойным неравенством $-1 \leqslant x \leqslant 2$, называют **отрезком**.

Рассмотренные множества — лучи, интервалы и отрезки — называют **числовыми промежутками** или просто **промежутками**.

Рис. 5.5

Рис. 5.6

Числовые промежутки

Название	Изображение	Запись на языке алгебры
Открытый луч		$x > a$ $x < b$
Замкнутый луч		$x \geqslant a$ $x \leqslant b$
Отрезок		$a \leqslant x \leqslant b$
Интервал		$a < x < b$

А

449. Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству: а) $x > 6$; б) $x \leqslant 6$; в) $x \geqslant -2$; г) $x < 7$. Как называется каждое из этих множеств?

450. Изобразите на координатной прямой множество всех точек:
а) с отрицательными координатами;
б) с неотрицательными координатами.
Задайте каждое из этих множеств с помощью неравенства.

451. Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:
а) $4 \leqslant x \leqslant 10$; б) $-15 \leqslant x \leqslant 27$; в) $8 < x < 11$.

452. Изобразите на координатной прямой промежуток:
а) $x < -4$; в) $x \leqslant -10$; д) $-30 < x < 30$;
б) $x \geqslant -12$; г) $x > 100$; е) $-37 \leqslant x \leqslant 54$.

453. Задайте с помощью неравенства или двойного неравенства промежутки, изображенные на рисунке 5.7, *а—е*.

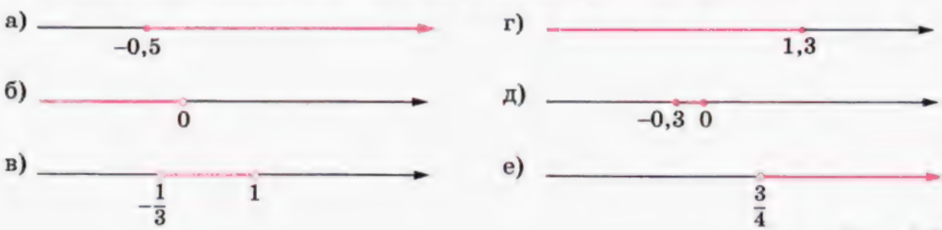


Рис. 5.7

454. Изобразите на координатной прямой и запишите с помощью неравенства или двойного неравенства:

Рис. 5.8

а) замкнутый луч с началом в точке 2 (сколько существует таких лучей?);
б) открытый луч с началом в точке −1 (сколько существует таких лучей?);
в) интервал от точки −2 до точки 3;
г) отрезок с концами в точках −8 и −2.

455. Какие из точек -6; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{6}$; 0; 0,4 принадлежат лучу, изображенному на рисунке 5.8?

456. Какие из чисел 0; $\frac{1}{2}$; −2; 16 принадлежат промежутку:

а) $x < 16$; б) $x \geqslant 0{,}5$; в) $2 \leqslant x \leqslant 16$; г) $0 < x < \frac{1}{3}$?

457. Найдите точку с целой положительной координатой, принадлежащую отрезку $-0{,}2 \leqslant x \leqslant 2{,}7$. Сколько таких точек на отрезке?

458. Сколько целых чисел принадлежит интервалу $-1{,}5 < x < 4$? лучу $x > 1000$?

459. Найдите наименьшее целое число, принадлежащее:
а) интервалу $-15 < x < 3$;
б) лучу $x \geqslant 0$;
в) лучу $x > 16$;
г) лучу $x < 2$.

Б

460. На рисунке 5.9, *а*, *б* изображены числовые промежутки, которые называют **полуинтервалами**. Запишите соответствующие им неравенства.

461. Запишите с помощью двойных неравенств и изобразите на координатной прямой полуинтервалы от точки 0 до точки 0,3. Сколько существует таких полуинтервалов?

462. Изобразите на координатной прямой указанные промежутки (используйте для этого разные цветные карандаши). Найдите объединение и пересечение этих промежутков:
а) $-1 \leqslant x \leqslant 7$, $1 \leqslant x \leqslant 10$;
б) $-5 \leqslant x \leqslant -2$, $-2 \leqslant x \leqslant 5$;
в) $0 < x < 7$, $2 \leqslant x < 7$;
г) $-8 \leqslant x < -4$, $-4 < x \leqslant 0$.

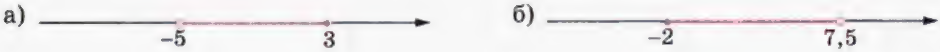


Рис. 5.9

463. (*Задание с выбором ответа.*) Найдите пересечение промежутков, заданных неравенствами $x \geqslant -1$ и $x \leqslant 6$.

А. $x \leqslant 6$. **Б.** $x \geqslant -1$. **В.** $-1 \leqslant x \leqslant 6$. **Г.** $\varnothing$.

5.2 Расстояние между точками координатной прямой

Если нам известна координата точки A на прямой, то мы знаем и расстояние от этой точки до начала отсчета, т. е. длину отрезка OA. Например, если точка A имеет координату, равную 5, то $OA = 5$ (рис. 5.10); если же ее координата равна -7, то $OA = 7$ (рис. 5.11). Вообще если точка A имеет координату $x = a$, то расстояние между точками A и O равно $|a|$ (рис. 5.12, *а*, *б*).

Пусть теперь на прямой заданы две произвольные точки A и B. Как, зная их координаты, найти расстояние между ними, т. е. как найти длину отрезка AB?

Оказывается, в математике есть специальная формула для решения этой задачи: если точки A и B имеют соответственно координаты $x = a$ и $x = b$, то

$$\boldsymbol{AB = |b - a|}.$$

Словами эту формулу читают так:

> расстояние между двумя точками координатной прямой равно модулю разности их координат.

Понятно, что выражение $|b - a|$ можно заменить выражением $|a - b|$. В самом деле, числа $a - b$ и $b - a$ противоположны и их модули равны.

Доказательство приведенной формулы довольно сложно, поэтому мы ограничимся тем, что убедимся в ее справедливости в некоторых конкретных случаях.

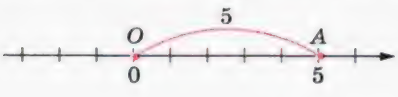


Рис. 5.10

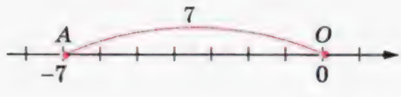
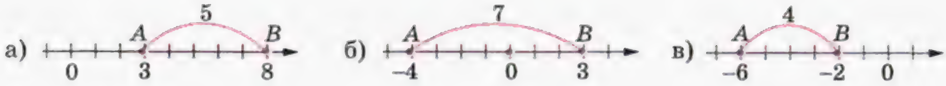


Рис. 5.11

Рис. 5.12



$|8 - 3| = 5$ $\quad$ $|3 - (-4)| = 7$ $\quad$ $|-2 - (-6)| = 4$

Рис. 5.13

Обратимся для этого к рисункам 5.13, *а—в*. На каждом из них изображена координатная прямая и отмечены точки A и B. Найдем, например, для случая *б* расстояние AB по рисунку и по формуле и сравним результаты. Из рисунка видно, что расстояние между точками $A(-4)$ и $B(3)$ равно 7. Такой же результат мы получим, если вычислим расстояние по формуле $AB = |3 - (-4)| = |7| = 7$. (Проведите самостоятельно аналогичные подсчеты для рисунков *а* и *в*.)

Заметим, что формула $AB = |b - a|$ справедлива и в том случае, когда точки A и B совпадают.

Приведем пример решения задачи с использованием рассмотренной формулы.

■ П р и м е р. Найдем координату середины отрезка, концами которого служат точки $A(-11{,}5)$ и $B(3{,}9)$.

Вычислим расстояние между точками A и B:

$$AB = |3{,}9 - (-11{,}5)| = |15{,}4| = 15{,}4.$$

Обозначим координату середины отрезка AB через x. Чтобы найти число x, можно к координате точки A прибавить половину расстояния между точками A и B:

$$x = -11{,}5 + 7{,}7 = -3{,}8.$$

А

464. Найдите расстояние между точками, отмеченными на координатной прямой (рис. 5.14, *а—г*).

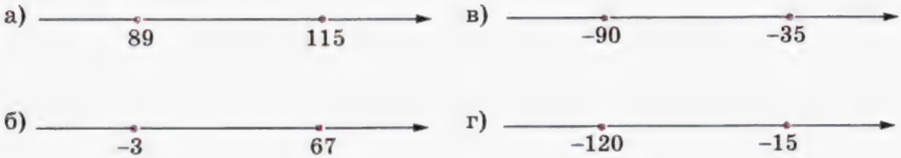


Рис. 5.14

Рис. 5.15

465. Найдите длины отрезков AB, AC, AO, AD, BD (рис. 5.15).

466. Найдите длину отрезка MN, если:

а) $M(-7)$, $N(35)$;

б) $M(\frac{1}{2})$, $N(\frac{1}{3})$;

в) $M(-2{,}76)$, $N(-2{,}83)$.

467. Найдите координаты вершины D прямоугольника $ABCD$, а также его периметр (рис. 5.16).

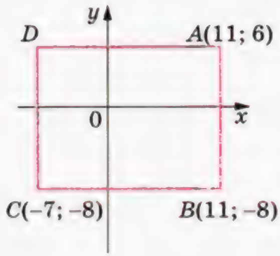


Рис. 5.16

468. Зная координату точки A на прямой и расстояние между точками A и B, найдите координату точки B:

а) $A(-1)$, $AB = 4$; б) $A(2)$, $AB = 6$.

469. а) Найдите координату точки C, которая является серединой отрезка с концами в точках $A(-6{,}8)$ и $B(12{,}4)$.

б) Точка A имеет координату, равную -4, а точка B — координату, равную 18. Найдите координаты точек, которые делят отрезок AB на четыре равные части.

Б

470. Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $|x| = 2$; б) $|x| \leqslant 1$; в) $|x| \geqslant 3$.

Указание. Прочитайте данное условие, используя слово «расстояние», например: $|x| = 2$ — расстояние от точки x до 0 равно 2.

471. а) Задайте двойным неравенством множество точек, удовлетворяющих условию $|x| < 4$.

б) Задайте промежуток $-6 < x < 6$ с помощью неравенства с модулем.

472. Прочитайте, используя слово «расстояние»:

а) $|m - 1| = 5$; б) $|m - 6| < 20$; в) $|a + 2| > 3$; г) $|c + 10| \leqslant 1$.

473. Запишите предложения с помощью знака модуля:

а) расстояние между точками c и 5 равно 8;
б) расстояние между точками a и 3 больше 1;
в) расстояние между точками b и − 9 меньше или равно 10;
г) расстояние между точками y и −2 больше или равно 12.

474. Изобразите на координатной прямой множество точек, удовлетворяющих условиям:

а) $|x-5|=3$, $|x-5|\leqslant 3$, $|x-5|\geqslant 3$;
б) $|x-1|=6$, $|x-1|<6$, $|x-1|>6$;
в) $|x+3|=4$, $|x+3|\leqslant 4$, $|x+3|\geqslant 4$;
г) $|x+2|=5$, $|x+2|<5$, $|x+2|>5$.

5.3 Множества точек на координатной плоскости

На прямой положение точки определяется одной координатой, а на плоскости в прямоугольной (декартовой) системе координат положение точки определяется двумя ее координатами — **абсциссой** и **ординатой**. Напомним, что единичные отрезки по осям координат берутся равными.

А если нам известна только одна из координат точки на плоскости? Где такая точка может быть расположена? Похожую задачу решали герои романа Жюля Верна «Дети капитана Гранта». Обнаружив записку, они смогли разобрать только одну из географических координат — широту того места, где корабль потерпел кораблекрушение. Поэтому им пришлось обходить всю Землю по 37-й параллели.

Вернемся к прямоугольной системе координат на плоскости. Пусть задана только одна координата точки, например, известно, что $y=2$. Посмотрите на рисунок 5.17. Понятно, что ординату, рав-

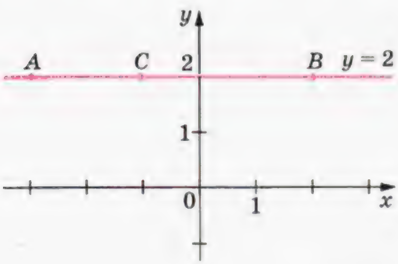


Рис. 5.17

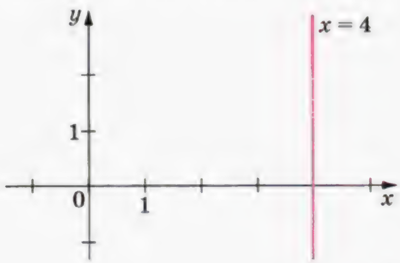


Рис. 5.18

ную 2, имеет и точка A, и точка B, и точка C, и вообще все точки, лежащие на прямой, параллельной оси абсцисс и проходящей через точку 2 на оси ординат. Таким образом, равенство $y=2$ задает на координатной плоскости прямую, параллельную оси абсцисс.

Точно так же множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $x=4$, — это прямая, параллельная оси ординат (рис. 5.18).

Понятно, что ось ординат задается равенством $x = 0$, а ось абсцисс — равенством $y=0$ (рис. 5.19).

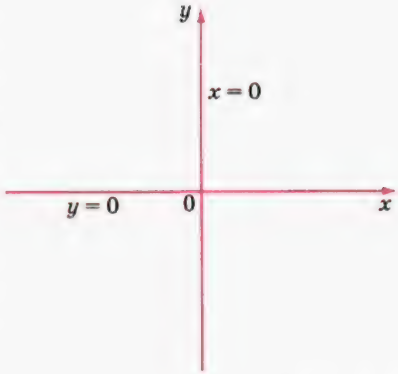


Рис. 5.19

Мы уже знаем, что на координатной прямой неравенству $x>3$ соответствует открытый луч. А на координатной плоскости это же условие задаст уже полуплоскость; она расположена правее прямой $x = 3$ (рис. 5.20). Все точки этой полуплоскости имеют абсциссы, большие 3. Ни точки прямой $x=3$, ни точки левее этой прямой таким свойством не обладают.

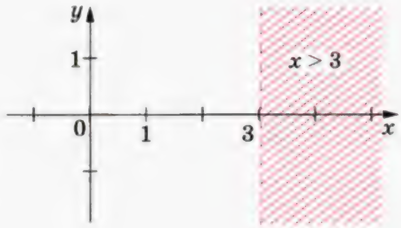


Рис. 5.20

На рисунке 5.21, *а—в* изображены некоторые полуплоскости и указаны неравенства, которым они соответствуют.

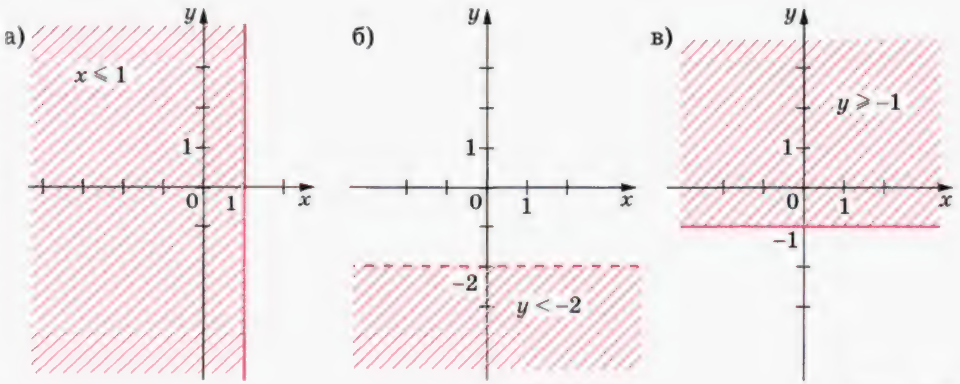


Рис. 5.21

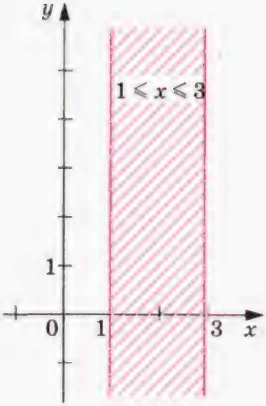


Рис. 5.22

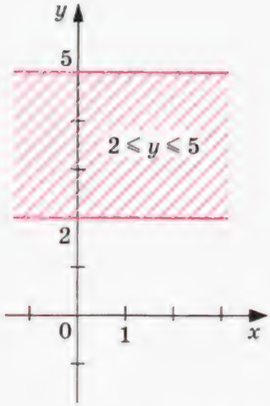


Рис. 5.23

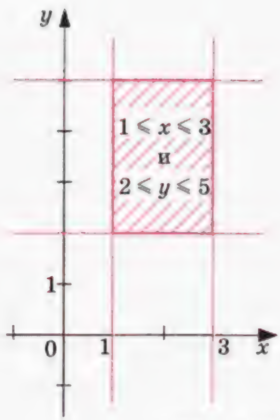


Рис. 5.24

Двойное неравенство $1 \leqslant x \leqslant 3$ задает на координатной плоскости вертикальную полосу (рис. 5.22), а двойное неравенство $2 \leqslant y \leqslant 5$ — горизонтальную полосу (рис. 5.23). А если потребовать, чтобы выполнялись одновременно оба условия, то на координатной плоскости получится пересечение этих полос — прямоугольник (рис. 5.24).

A

475. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству:

а) $x = 3$; в) $y = -2$; д) $x = 0$;
б) $x = -1{,}25$; г) $y = 25$; е) $y = 0$.

476. Опишите на алгебраическом языке прямые, изображенные на рисунке 5.25, *а*—*г*.

477. Опишите на алгебраическом языке:

а) прямую, проходящую через точку 5 оси ординат и параллельную оси абсцисс;

б) прямую, проходящую через точку (−5; 2) и параллельную оси ординат.

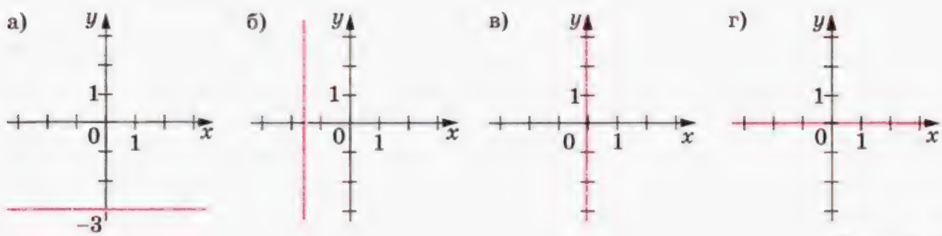


Рис. 5.25

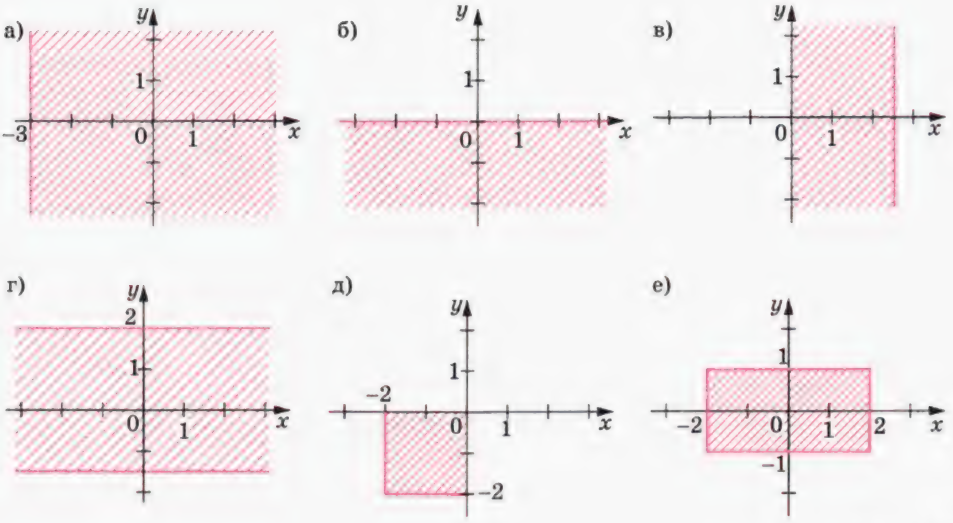


Рис. 5.26

478. Известно, что точки $A(2;\ -1)$ и $B(5;\ a)$ расположены на прямой, перпендикулярной оси ординат. Найдите a.

479. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $x > 5$; в) $x \geqslant 0$; д) $y < -2$;

б) $x \leqslant \frac{2}{5}$; г) $y \geqslant 0$; е) $y > -3{,}5$.

480. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют двойному неравенству:

а) $-12 \leqslant x \leqslant 8$; в) $-5{,}5 \leqslant x \leqslant -5$;

б) $1{,}5 < y < 2$; г) $-0{,}5 \leqslant y \leqslant 1{,}5$.

481. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют двойным неравенствам:

а) $-1 \leqslant x \leqslant 4$ и $-2 \leqslant y \leqslant 3$;

б) $0 \leqslant x \leqslant 10$ и $0 \leqslant y \leqslant 10$.

482. Опишите на алгебраическом языке области, изображенные на рисунке 5.26, *а—е*.

483. Неравенства $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ задают первую координатную четверть (рис. 5.27) — все ее точки имеют неотрицательные координаты.

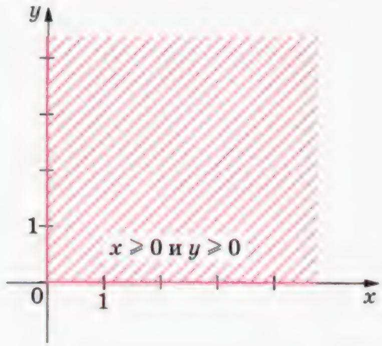
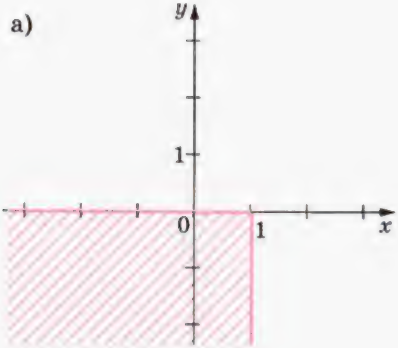


Рис. 5.27

а)



б)

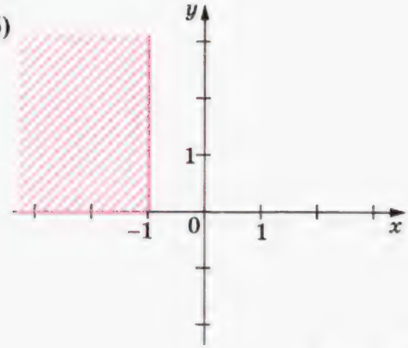


Рис. 5.28

Опишите на алгебраическом языке каждую из остальных трех координатных четвертей.

484. Задайте с помощью неравенств множество точек, изображенное на рисунке 5.28, *а*, *б*.

Б

485. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям:

а) $|x| = 3$; в) $|y| \leqslant 2$; д) $|x| \leqslant 3$ и $|y| \leqslant 3$;

б) $|y| = 1$; г) $|x| \geqslant 5$; е) $|x| \geqslant 3$ и $|y| \geqslant 3$.

486. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям:

а) $y = 1$ и $x > 3$; б) $y = 3$ и $1 < x < 3$; в) $|y| = 2$ и $|x| > 4$.

487. Изобразите на координатной плоскости и опишите на алгебраическом языке множество точек, симметричных точкам прямой $x = 3$:

а) относительно оси ординат;

б) относительно прямой $x = 1$.

488. Изобразите на координатной плоскости и опишите на алгебраическом языке множество точек, симметричных относительно оси абсцисс точкам полосы, заданной неравенством $2 \leqslant y \leqslant 5$.

5.4 Графики

Будем теперь рассматривать множества точек координатной плоскости, абсциссы и ординаты которых связаны какой-либо зависимостью. Где, например, на координатной плоскости расположены

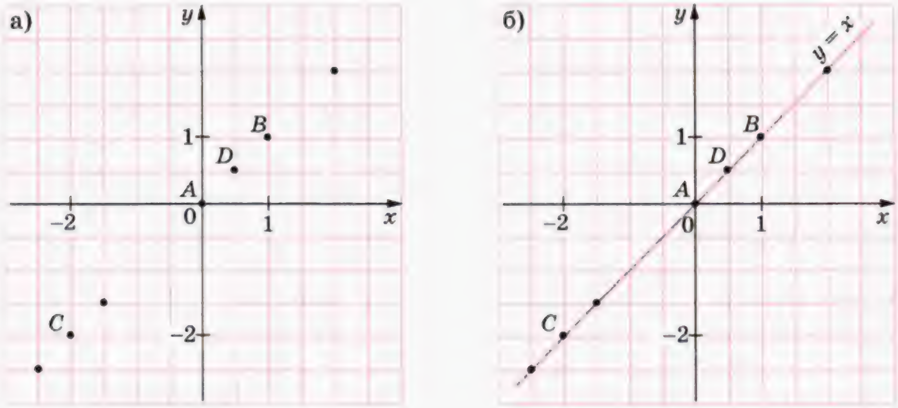


Рис. 5.29

точки, у которых ордината равна абсциссе, т. е. координаты которых удовлетворяют равенству $y = x$?

Отметим точки $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 1)$, $C(-2;\ -2)$, $D(0{,}5;\ 0{,}5)$ и еще несколько точек, имеющих равные координаты (рис. 5.29, *а*). Нетрудно видеть, что все такие точки лежат на прямой линии — биссектрисе первого и третьего координатных углов (рис. 5.29, *б*). Таким образом, равенство $y = x$ задает на координатной плоскости прямую. Заметим, что эту прямую можно также задать равенством $y - x = 0$, означающим то же самое, что и $y = x$.

На рисунке 5.30 изображена другая прямая. Чтобы описать эту прямую на алгебраическом языке, попробуем найти зависимость, которая связывает абсциссу и ординату каждой ее точки. Этой прямой принадлежат, например, точки $A(2;\ -2)$, $B(1;\ -1)$, $C(-1;\ 1)$. У каждой из этих точек абсцисса и ордината — противоположные числа. На языке алгебры это можно записать так: $y = -x$. Равенству $y = -x$ удовлетворяет любая точка рассматриваемой прямой, и никакая другая точка координатной плоскости этому условию не удовлетворяет. Значит, прямая — биссектриса II и IV координатных углов — задается равенством $y = -x$.

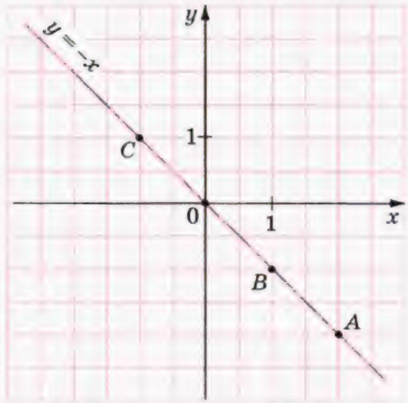


Рис. 5.30

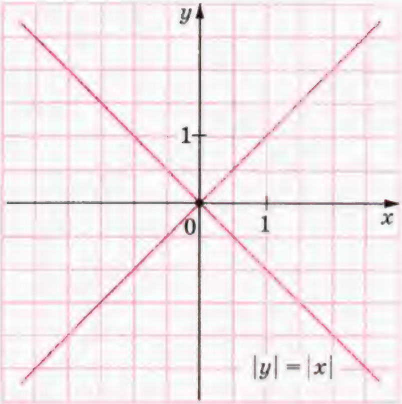


Рис. 5.31

Очевидно, что эту прямую можно также задать равенством $x + y = 0$.

Используя прямые $y = x$ и $y = -x$, изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых связаны более сложным соотношением $|y| = |x|$.

Если модули двух чисел равны, то эти числа либо равны, либо противоположны. Следовательно, условие $|y| = |x|$ означает, что $y = x$ или $y = -x$. Значит, множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $|y| = |x|$, образовано прямыми $y = x$ и $y = -x$. Иными словами, оно является объединением этих двух прямых (рис. 5.31).

Выражая на геометрическом языке различные зависимости, связывающие координаты точек, мы получаем множества точек на координатной плоскости. Эти множества называют **графиками** соответствующих зависимостей.

Так, если координаты связаны зависимостью $y = x$, то ее графиком, как вы уже знаете, является прямая — биссектриса I и III координатных углов. А если координаты связаны соотношением $y = -x$, то графиком является другая прямая — биссектриса II и IV координатных углов.

А

489. Координаты точек связаны зависимостью $y = x + 2$.

а) Заполните таблицу:

x	−4	−2	0	2	4
y					

б) Используя данные таблицы, постройте график данной зависимости.

490. Принадлежит ли множеству точек, заданному равенством $y = 1 - x$, точка $A(1;\ 0)$? $B(-2;\ 3)$? $C(3;\ 2)$? $D(-4;\ -3)$? Назовите координаты еще двух точек, принадлежащих этому множеству, и двух точек, этому множеству не принадлежащих.

491. Из точек $A(0;\ 5)$, $B(-3;\ 2)$, $C(3;\ -8)$ и $D(-5;\ 0)$ выберите те, которые принадлежат графику зависимости $x + y = -5$.

492. Составьте таблицу и постройте по точкам график зависимости, заданной равенством:

а) $y = -2x$; б) $y = 2 - x$; в) $y - x = 3$.

493. Задайте на алгебраическом языке и изобразите на координатной плоскости множество точек, у которых:

а) ордината равна утроенной абсциссе;
б) ордината на 3 больше абсциссы;
в) абсцисса на 2 больше ординаты;
г) сумма абсциссы и ординаты равна 4.

494. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям:

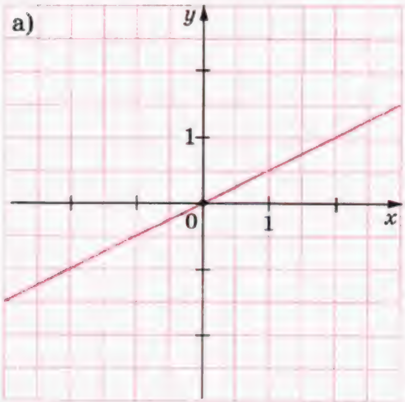
а) $y = x$ и $-2 \leqslant x \leqslant 3$;
б) $y - x = 0$ и $-1 \leqslant x \leqslant 1$;
в) $y = -x$ и $-4 \leqslant x \leqslant 4$;
г) $x + y = 0$ и $2 \leqslant y \leqslant 5$;
д) $|x| = |y|$ и $-1 \leqslant x \leqslant 1$;
е) $|y| = |x|$ и $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

Б

495. По каждому из графиков, изображенных на рисунке 5.32, *а*, *б*, заполните таблицу:

x	-2	-1	0	1	2
y					

Установите зависимость между координатами точек каждой прямой.



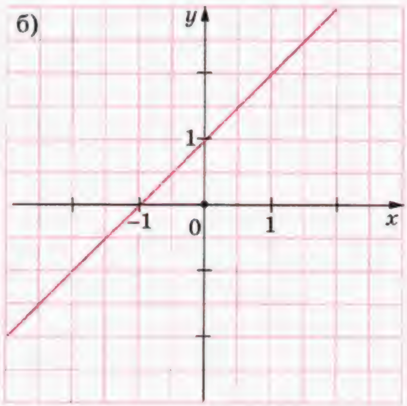


Рис. 5.32

496. График зависимости — прямая, которая задается условием $y = \frac{1}{2}x$ (см. рис. 5.32, *а*). Постройте прямую, симметричную этой прямой относительно оси ординат, и найдите зависимость, которая связывает координаты ее точек.

497. График зависимости $y = 2x$ — прямая. Постройте эту прямую по точкам. Постройте прямую, симметричную относительно оси абсцисс прямой $y = 2x$. Найдите зависимость, которой удовлетворяют координаты точек этой прямой.

498. Постройте множество точек плоскости, координаты которых связаны соотношением $y^2 = x^2$.

5.5 Еще несколько важных графиков

Попробуем теперь рассмотреть более сложные зависимости, которые могут связывать абсциссы и ординаты точек плоскости, и посмотрим, как будут выглядеть соответствующие графики.

Пусть координаты связаны соотношением $y = x^2$. Чтобы построить график, заполним сначала таблицу значений x и y:

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
y	0	1	1	4	4	9	9

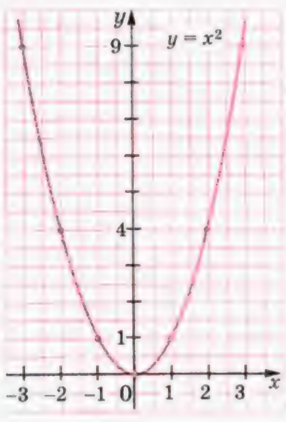


Рис. 5.33

Отметим соответствующие точки на координатной плоскости и соединим их плавной линией (рис. 5.33). Полученный красивый график, похожий на чашу, называется **параболой**.

Можно вычислить координаты других точек, удовлетворяющих равенству $y = x^2$, и отметить их на координатной плоскости. Все они попадут на эту параболу.

Парабола расположена в верхней полуплоскости. Об этом можно было догадаться заранее, еще до построения графика — по самому равенству $y = x^2$. Как вы знаете, квадрат любого числа положителен или равен нулю, т. е. при любом x $y \geqslant 0$.

Парабола симметрична относительно оси ординат. Ось симметрии делит параболу на две части, называемые **ветвями параболы.** Точку (0; 0), в которой сходятся ветви параболы, называют **вершиной параболы**. В вершине одна ветвь параболы плавно переходит в другую. И в этой же точке, как говорят математики, парабола *касается* оси абсцисс.

Разные параболы вы не раз могли наблюдать в жизни. Ведь именно по параболе, несколько искаженной сопротивлением воздуха, летит камень, мяч, снаряд и любое другое тело, брошенное под углом к горизонту.

Построим теперь график зависимости $y = x^3$.

Вычислим координаты нескольких точек, удовлетворяющих равенству $y = x^3$, и заполним таблицу:

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
y	0	1	−1	8	−8	27	−27

Отметим найденные точки на координатной плоскости и соединим их плавной линией. Эта линия называется **кубической параболой** (рис. 5.34).

Кубическая парабола симметрична относительно начала координат. Центр симметрии делит ее на две ветви, расположенные в I и III координатных четвертях.

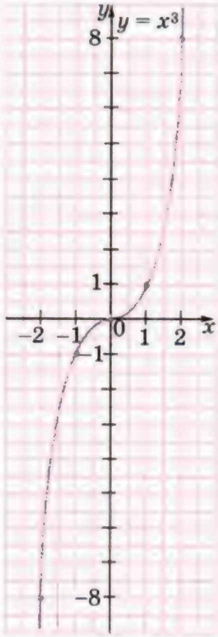


Рис. 5.34

Графики зависимостей $y = x^2$ и $y = x^3$ мы построили по точкам, предварительно заполнив таблицы. Некоторые графики можно строить, используя уже знакомые графики.

■ П р и м е р. Построим график зависимости $y = |x|$.

Модуль положительного числа равен самому числу, модуль нуля также равен самому числу, т. е. нулю. Значит, при $x \geqslant 0$ верно равенство

$$|x| = x.$$

Модуль отрицательного числа равен противоположному числу. Значит, при $x < 0$

$$|x| = -x.$$

Поэтому условие $y = |x|$ можно заменить двумя: 1) $y = x$ при $x \geqslant 0$; 2) $y = -x$ при $x < 0$.

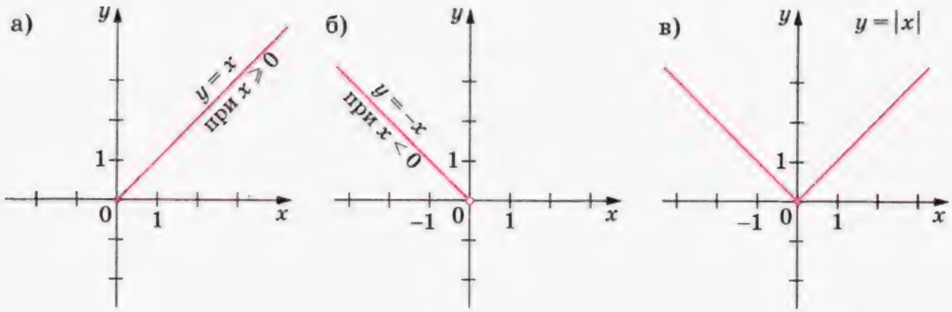


Рис. 5.35

Обычно эти два условия записывают так:

$$y = \begin{cases} x \text{ при } x \geqslant 0 \\ -x \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Зависимость $y = |x|$ на разных промежутках задана разными условиями, поэтому и график строится по частям. При $x \geqslant 0$ график совпадает с известной нам прямой $y = x$ (рис. 5.35, *а*). Понятно, что мы берем только те точки этой прямой, абсциссы которых неотрицательны. При $x < 0$ график совпадает с прямой $y = -x$ (рис. 5.35, *б*). Здесь мы берем только те точки этой прямой, абсциссы которых отрицательны.

Теперь получившиеся части графика изобразим на одном чертеже и получим график зависимости $y = |x|$ (рис. 5.35, *в*).

А

499. Из точек $A(0;\ 0)$, $B(-1;\ 1)$, $C(1;\ 1)$, $D(-1;\ -1)$, $E(-2;\ 4)$, $F(3;\ 27)$ выберите те, которые принадлежат:

а) параболе $y = x^2$;

б) кубической параболе $y = x^3$;

в) графику зависимости $y = |x|$.

500. Постройте по точкам график зависимости:

а) $y = -x^2$; б) $y = -x^3$.

501. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $y = x^2$, где:

а) $-3 \leqslant x \leqslant 3$; б) $-2 \leqslant x \leqslant 1$; в) $x \leqslant 0$.

502. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $y = x^3$, где:

а) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; б) $x \geqslant 0$; в) $x \leqslant 1$.

503. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $y = |x|$, где:

а) $x \leqslant 3$; б) $x \geqslant -4$; в) $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

504. Известно, что $y = x^2 + 2x$. Составьте таблицу и постройте по точкам график этой зависимости. Вы получили уже знакомую вам линию. Какую?

505. Множество точек на плоскости задано условиями:

$$y = \begin{cases} x \text{ при } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Изобразите это множество точек на координатной плоскости. Какие из точек $(-1;\ 0)$, $(0{,}5;\ 0{,}5)$, $(1;\ 0)$, $(2;\ 2)$, $(-3;\ -3)$ принадлежат этому множеству?

506. Множество точек на плоскости задано условиями:

$$y = \begin{cases} x^2 \text{ при } x \leqslant 1 \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Изобразите это множество точек на координатной плоскости. Какие из точек $(0;\ 0)$, $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\right)$, $(2;\ 4)$, $(-2;\ 4)$, $(3;\ 1)$ принадлежат этому множеству?

507. Постройте график зависимости, если известно, что:

а) $y = \begin{cases} x^2 \text{ при } x \geqslant 0 \\ -x \text{ при } x < 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -x \text{ при } x \geqslant 0 \\ x^3 \text{ при } x < 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} 3 \text{ при } x \geqslant 3 \\ x \text{ при } -3 < x < 3 \\ -3 \text{ при } x \leqslant -3; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} 0 \text{ при } x \geqslant 0 \\ -x \text{ при } -2 < x < 0 \\ 2 \text{ при } x \leqslant -2; \end{cases}$

д) $y = \begin{cases} 3 \text{ при } x \geqslant 3 \\ |x| \text{ при } -3 < x < 3 \\ 3 \text{ при } x \leqslant -3; \end{cases}$

е) $y = \begin{cases} 4 \text{ при } x \leqslant -2 \\ x^2 \text{ при } -2 < x < 2 \\ 4 \text{ при } x \geqslant 2. \end{cases}$

Б

508. В одной системе координат постройте параболу $y = x^2$ и прямую $y = -x$. Найдите координаты точек пересечения этих графиков. При каких значениях x парабола лежит выше прямой? ниже прямой?

509. Найдите координаты точек плоскости, в которых кубическая парабола $y = x^3$ пересекается с прямой $y = x$. Укажите промежутки значений x, в которых прямая расположена выше кубической параболы.

510. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям:

а) $y = x^2$ и $1 \leqslant y \leqslant 9$; в) $y = |x|$ и $y \leqslant 3$;

б) $y = x^3$ и $-8 \leqslant y \leqslant 1$; г) $y = |x|$ и $y \geqslant 1$.

511. Постройте график зависимости:

а) $y = \begin{cases} x^2 \text{ при } x \geqslant 1 \\ 1 \text{ при } -1 < x < 1 \\ -x \text{ при } x \leqslant -1; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 4 \text{ при } x \geqslant 2 \\ x^2 \text{ при } 0 < x < 2 \\ -x \text{ при } x \leqslant 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} x \text{ при } |x| \geqslant 1 \\ x^3 \text{ при } |x| < 1. \end{cases}$

512. Найдите координаты общих точек графиков зависимостей $y = x^2$ и $y = |x|$.

513. Изобразите параболу, симметричную параболе $y = x^2$ относительно оси абсцисс. Каким соотношением связаны координаты точек этой параболы?

514. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству:

а) $x = y^2$; б) $x = |y|$.

5.6 Графики вокруг нас

Графический способ — один из самых удобных и наглядных способов представления и анализа информации.

Например, метеорологическая служба фиксирует изменение температуры в течение суток. Полученные данные можно проанализировать, представив их в виде таблицы:

Время суток t, ч	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Температура T, °C	3	0	−1	−3	−1	0	2	5	7	5	4	4	2

Однако гораздо удобнее провести исследование поведения температуры, представив эти же данные графически.

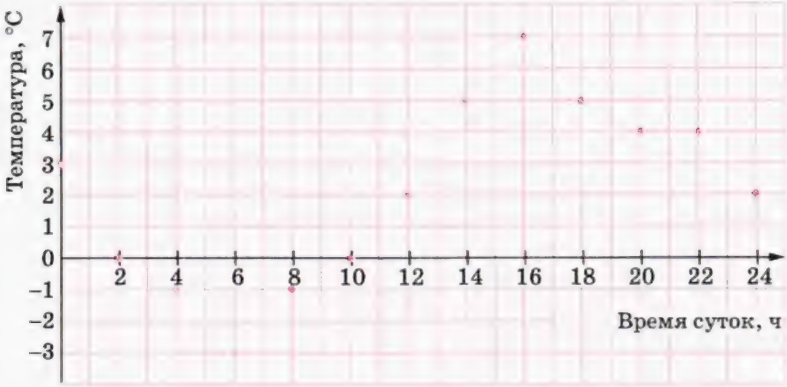


Рис. 5.36

Перенесем данные таблицы на координатную плоскость. По оси абсцисс будем откладывать значения времени, а по оси ординат — значения температуры (рис. 5.36).

В данной таблице замеры температуры представлены через каждые два часа. Обычно говорят так: таблица составлена с *шагом*, равным 2 ч. Можно получить более точные представления об изменении температуры в течение суток, уменьшая шаг таблицы. При этом на координатной плоскости мы будем получать все больше и больше точек (рис. 5.37).

Все построенные таким образом точки будут лежать на некоторой плавной линии (рис. 5.38). Эту линию называют *графиком температуры*. Такие графики метеорологи получают с помощью

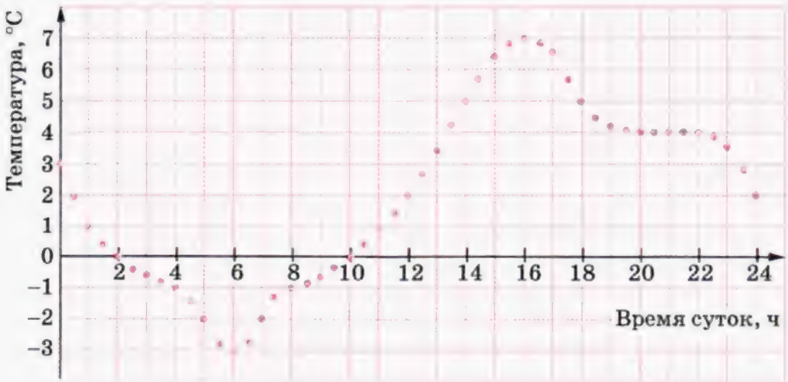


Рис. 5.37

Рис. 5.38

специального прибора — термографа, отмечающего температуру на движущейся ленте или на экране дисплея (рис. 5.39).

График температуры дает нам много полезной информации. Например, по графику легко узнать, когда температура была положительной, а когда отрицательной, когда она росла, а когда понижалась.

С 0 ч до 2 ч и после 10 ч температура была положительной, так как на этих промежутках график расположен выше оси абсцисс. С 2 ч до 10 ч температура была отрицательной, так как на этом промежутке график лежит ниже оси абсцисс.

С 6 ч до 16 ч температура росла, так как на этом промежутке график идет вверх, а с 0 ч до 6 ч, с 16 ч до 20 ч и с 22 ч до 24 ч понижалась (график идет вниз).

Рис. 5.39

С 20 ч до 22 ч температура не менялась.

По графику видно, что самая высокая температура за сутки, равная 7°, была в 16 ч, а самая низкая, равная −3°, — в 6 ч.

По графику можно получить и другую полезную информацию: например, когда температура менялась быстрее, а когда медленнее.

Используя показания сейсмографов — приборов, непрерывно фиксирующих колебания почвы и строящих специальные графики — *сейсмограммы*, геологи могут пред-

Рис. 5.40

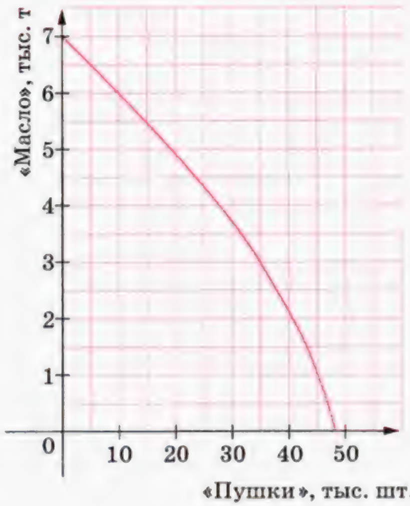


Рис. 5.41

сказывать приближение землетрясения или цунами. А врачи выявляют болезни сердца, изучая полученные с помощью кардиографа *кардиограммы* (рис. 5.40).

Широко используются различные графики и в экономике. Есть известная поговорка: «Чем больше пушек — тем меньше масла». Имеются в виду возможности производства в одной стране продовольствия и вооружения (в данном случае «масла» и «пушек»). Оказывается, верность поговорки подтверждают математические расчеты. На рисунке 5.41 эти расчеты представлены графически. Экономисты изображенный график называют *линией производственных возможностей*. Этот график наглядно показывает, как изменяется структура производства в условиях подготовки к войне и ведения войны, почему при этом появляется дефицит товаров и продуктов питания. По графику видно, что если, например, производить 40 тыс. «пушек», то «масла» при этом можно будет произвести только 2 тыс. тонн. А если снизить производство «пушек» до 10 тыс., то тогда есть возможность произвести 6 тыс. тонн «масла».

515. На рисунке 5.42 изображен график температуры воздуха в городе Лукошкино 19 октября 2004 г. Используя график, ответьте на вопросы:

а) В какое время суток температура была равна 4°? 2°? 0°? −6°?

б) Когда в течение суток температура была положительной? отрицательной?

в) Какова была минимальная и максимальная температура в этот день?

г) Когда в этот день температура повышалась? понижалась?

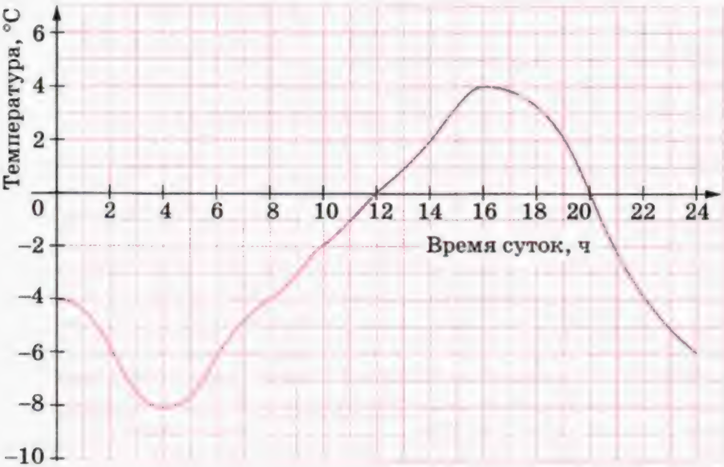


Рис. 5.42

516. Отъехав от стоянки, водитель через некоторое время увидел внезапно выбежавшего на дорогу щенка, резко сбросил скорость, а затем продолжил движение, увеличивая скорость. На рисунке 5.43 изображен график скорости движения автомобиля. С помощью графика ответьте на вопросы:

а) Какова была наибольшая скорость автомобиля в течение первых 10 с движения?

б) Сколько времени автомобиль двигался с постоянной скоростью?

в) Через сколько секунд после начала движения водитель нажал на тормоз?

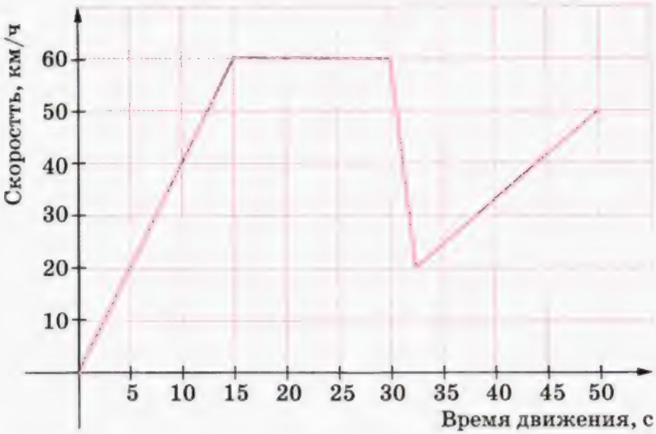


Рис. 5.43

517. Турист поднялся из поселка на вершину горы и затем вернулся обратно в поселок. На рисунке 5.44 представлен график движения туриста. С помощью графика найдите:

а) Сколько времени турист пробыл на вершине горы?

б) За сколько минут турист прошел первый километр подъема и первый километр спуска?

в) Сколько километров турист прошел за первые полчаса пути? за следующий час пути?

г) Через сколько времени от начала движения турист был в 2 км от поселка?

д) Какова была средняя скорость туриста (в км/ч) на подъеме? на спуске?

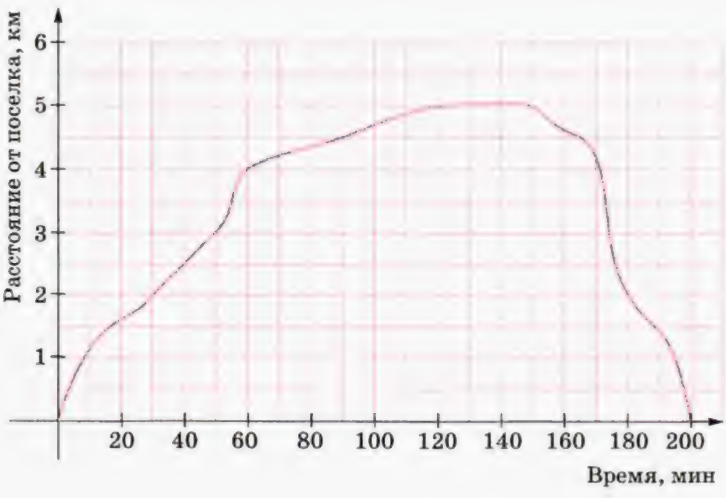


Рис. 5.44

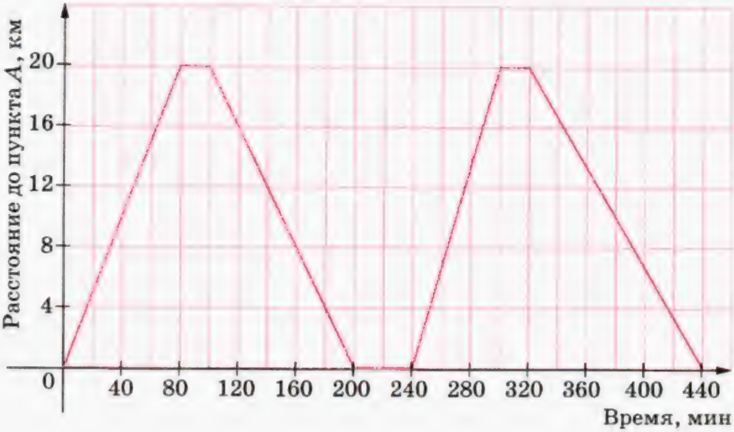


Рис. 5.45

518. Паром дважды в сутки плывет по озеру из пункта A в пункт B и возвращается обратно. На рисунке 5.45 показана зависимость расстояния между паромом и пунктом A от времени движения. С помощью графика определите:

а) Сколько времени длилась стоянка парома между третьим и четвертым рейсами?

б) Какова была скорость парома при первом возвращении из пункта B в пункт A?

в) В каком из четырех рейсов паром проплыл свой путь быстрее всего?

Б

519. На рисунке 5.46 изображен график роста тиража новой газеты с июля 2004 по апрель 2005 г. С помощью графика ответьте на вопросы:

а) Каков был начальный тираж газеты в указанный период?

б) Когда примерно тираж газеты достиг 200 тыс. экземпляров? 250 тыс. экземпляров? 500 тыс. экземпляров?

в) На сколько примерно процентов вырос тираж газеты за июль? за осень?

г) В каком месяце был самый быстрый рост тиража и в каком самый медленный?

520. Для определения возможностей спортсменов тренер секции легкой атлетики предложил Андрею, Борису и Вадиму бежать по

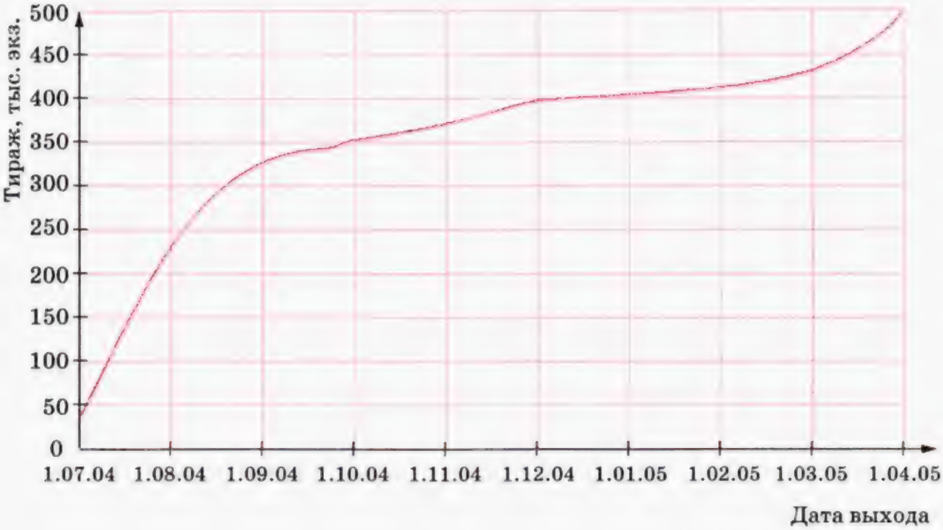


Рис. 5.46

шоссе «на износ». Графики их бега представлены на рисунке 5.47. Используя графики, ответьте на вопросы:

а) Кто пробежал дальше всех?

б) Кто бежал дольше всех?

в) Сколько километров пробежал Вадим за первый час? Где в это время находились Андрей и Борис — впереди Вадима или позади?

г) Сколько времени бежал Борис? Сколько километров он пробежал? Какова его средняя скорость?

д) Кто бежал быстрее всех (с наибольшей средней скоростью)?

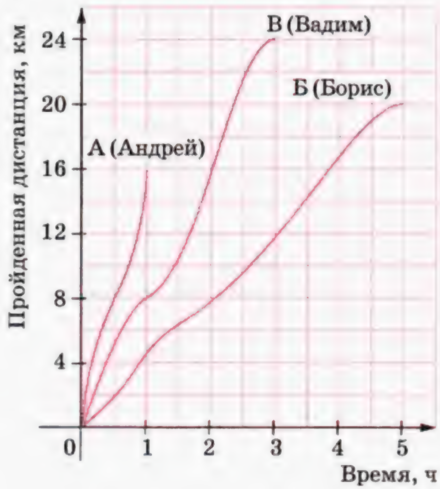


Рис. 5.47

е) Сколько километров пробежал Вадим, когда Борис пробежал 8 км?

521. На рисунке 5.48 изображены графики зависимости роста Анны и Бориса от их возраста. Используя графики, определите: а) Рост каждого из них при рождении, в 3 года, в 17 лет.

б) В каком возрасте каждый из них достиг роста 120 см? 140 см? 180 см?

в) Кто был выше в 3 года и на сколько?

г) На сколько каждый из них вырос за первые 6 лет жизни? в период с 14 до 20 лет?

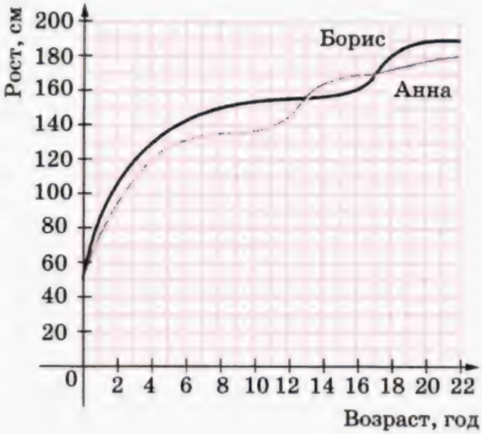


Рис. 5.48

522. В экономических исследованиях часто используется *кривая спроса* — график, который показывает, как зависит спрос на товар от его цены. В таблице представлено соотношение цены на 1 кг яблок и количества яблок, на которое при такой цене предъявлен спрос.

Цена 1 кг яблок, р.	4	6	8	10	12
Количество яблок, на которое предъявлен спрос, тыс. т.	10	7	4,5	2,5	1

Представив данные таблицы точками на координатной плоскости и соединив полученные точки плавной линией, начертите кривую спроса на яблоки.

523. В парламенте Страны Лилипутов, куда попадает Гулливер, знаменитый герой Дж. Свифта, представлены две партии: высококаблучники и низкокаблучники. Всего в парламенте 25 мест. В таблице указано количество депутатских мест, которые получали высококаблучники на десяти последних выборах.

Выборы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество мест высококаблучников	9	11	13	15	12	10	6	8	10	14

а) Составьте такую же таблицу для партии низкокаблучников.
б) Представив данные соответствующей таблицы точками на координатной плоскости и соединив полученные точки, постройте «кривую популярности» высококаблучников. В той же системе координат постройте «кривую популярности» низкокаблучников. Как связаны между собой эти кривые?

5.7 Графики зависимостей, заданных равенствами с модулями

(Для тех, кому интересно)

Вы уже знакомы с графиками зависимостей $y=|x|$ и $|y|=|x|$. Рассмотрите еще несколько зависимостей, которые на алгебраическом языке задаются равенствами, содержащими знак модуля, и постройте их графики. Если вы поняли, что такое модуль числа и как с ним работать, то вам это будет нетрудно.

Такие множества точек удобно строить по частям, в одних случаях рассматривая соответствующие полуплоскости, а в других — координатные четверти.

■ Пример. Построим на координатной плоскости множество точек, заданное условием $y=|x|+x$.

Если $x \geqslant 0$, то $|x|=x$ и данное условие запишется в виде $y=2x$. Если $x<0$, то $|x|=-x$ и тогда данное условие запишется в виде $y=0$.

Таким образом,

$$y=\begin{cases} 2x \text{ при } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ при } x<0. \end{cases}$$

А такие графики вы строить уже умеете; выполните построение самостоятельно.

524. Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству:

а) $y=|x|-x$; б) $y=|x|\cdot x$; в) $y=\frac{|x|}{x}$; г) $y=\frac{2x}{|x|}$.

ДЗ Дополнительные задания к главе 5

Расстояние между точками координатной прямой

525. Покажите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению или неравенству:

а) $|x-4|=2$, $|x-4|<2$, $|x-4|>2$;

б) $|x+3|=4$, $|x+3|<4$, $|x+3|>4$.

526. Покажите на координатной прямой множество точек, задаваемых неравенством:

а) $|x-20|<5$; б) $|x-6|>1$; в) $|x+1,5|<5$; г) $|x+0,5|>2,5$.

527. Найдите число x, если:

а) $|x| = |x - 5|$; в) $|x - 2| = |x - 8|$;

б) $|x| = |x + 14|$; г) $|x + 3| = |x - 7|$.

Образец. Найдем число x, если $|x + 2| = |x - 10|$.

Решение. Равенство $|x + 2| = |x - 10|$ можно прочитать так: расстояние от точки x до точки -2 равно расстоянию от точки x до точки 10. Изобразим на координатной прямой числа -2 и 10 и найдем середину отрезка с концами в точках -2 и 10. Получим, что $x = 4$.

528. Прочитайте неравенство, используя слово «расстояние», и найдите с помощью координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют этому неравенству:

а) $|x| \geqslant |x - 1|$; б) $|x + 2| \leqslant |x - 2|$.

Множество точек на координатной плоскости

529. Постройте ломаную $ABCD$ по описанию ее звеньев:

а) AB: $x = -5$ и $|y| \leqslant 5$;
BC: $y = x$ и $|x| \leqslant 5$;
CD: $y = 5$ и $0 \leqslant x \leqslant 5$;

б) AB: $x = -3$ и $-3 \leqslant y \leqslant 3$;
BC: $y = x$ и $-3 \leqslant x \leqslant 5$;
CD: $x = 5$ и $-5 \leqslant y \leqslant 5$.

530. Задайте с помощью неравенств множество точек координатной плоскости, изображенное на рисунке 5.49, *а*, *б*.

531. Прямоугольник задан условиями

$$1 \leqslant x \leqslant 3 \quad \text{и} \quad 1 \leqslant y \leqslant 2.$$

Изобразите на координатной плоскости и опишите на алгебраическом языке множество точек, симметричных этому прямоугольнику относительно:

а) оси ординат;
б) оси абсцисс;
в) начала координат.

532. Опишите на алгебраическом языке множество точек координатной плоскости, изображенное на рисунке 5.50, *а*, *б*.

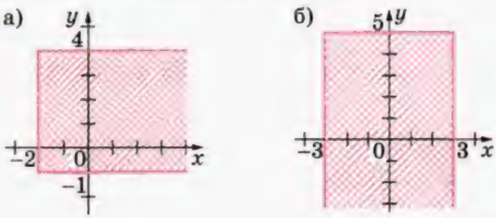


Рис. 5.49

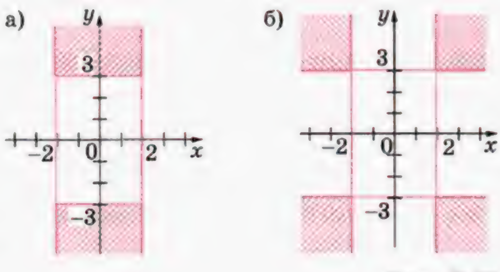


Рис. 5.50

Графики реальных зависимостей

533. Катер курсирует между пляжем и парком водных аттракционов, расположенным на расстоянии 3 км от пляжа. На рисунке 5.51 изображен график движения катера в первые 40 мин его работы. Используя график, ответьте на вопросы:

а) Сколько остановок сделал катер в течение 40 мин? Какова длительность каждой остановки?

б) Сколько километров прошел катер в первые 4 мин?

в) С какой скоростью шел катер первые 6 мин?

г) С одинаковой ли скоростью шел катер в рассматриваемый промежуток времени?

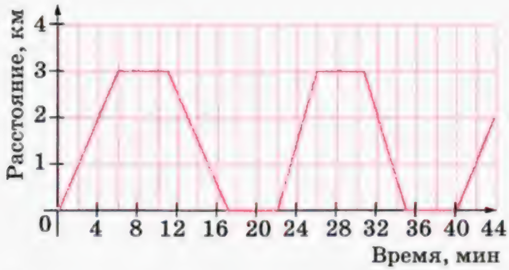


Рис. 5.51

534. Лыжник во время тренировки пробежал дистанцию 3000 м по лыжне, проходящей по лесной просеке, длина которой 500 м. График (рис. 5.52) показывает, как менялось во время движения расстояние между лыжником и его стартом. Используя график, ответьте на вопросы:

а) За какое время лыжник прошел всю дистанцию?

б) Какова была скорость лыжника на третьем отрезке пути?

в) На каком по счету отрезке пути лыжник шел медленнее всего? С какой скоростью?

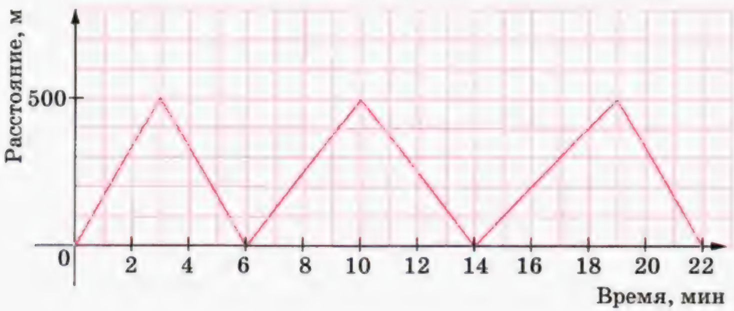


Рис. 5.52

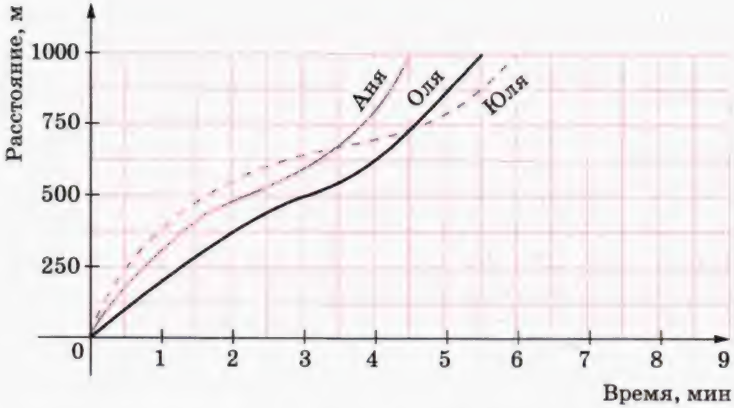


Рис. 5.53

535. Три спортсменки — Аня, Оля и Юля — участвовали в кроссе на дистанции 1000 м. Они стартовали одновременно. Графики их бега показаны на рисунке 5.53. Используя графики, ответьте на вопросы:

а) Сколько времени Юля бежала первой?

б) В какой момент Юлю догнала Оля?

в) С какой скоростью бежала Оля первые две минуты?

г) Какая спортсменка прибежала к финишу первой? С каким результатом?

536. У девочек одного из седьмых классов узнали их рост и вес. Затем каждой девочке поставили в соответствие точку на координатной плоскости, отложив по горизонтальной оси рост (в см), а по вертикальной — вес (в кг) (рис. 5.54). Для танцевальной студии нужны девочки не ниже 155 см и не выше 165 см, которые весят не более 45 кг. Сколько таких в классе?

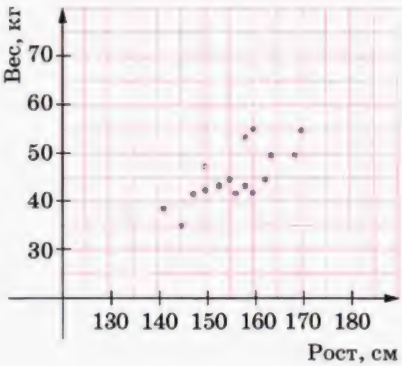


Рис. 5.54

Вопросы для повторения к главе 5

1. Назовите известные вам числовые промежутки и приведите соответствующие примеры.
2. На координатной прямой даны точки $A(14)$, $B(-6)$, $C(a)$. На каком расстоянии от точки 0 находится каждая из этих точек?

3. Запишите формулу расстояния между точками координатной прямой. По этой формуле найдите расстояние между точками $A(-10{,}4)$ и $B(2{,}3)$.
4. Каким равенством задается биссектриса I и III координатных углов?
5. Каким равенством задается биссектриса II и IV координатных углов?
6. Как называется график зависимости $y = x^2$? Укажите координаты нескольких точек, принадлежащих этому графику. Постройте этот график и опишите его свойства.
7. Изобразите на координатной плоскости график зависимости $y = x^3$.
8. Изобразите на координатной плоскости график зависимости $y = |x|$.

Задания для самопроверки к главе 5

(Обязательные результаты обучения)

1. Изобразите на координатной прямой промежуток:
а) $x > 3$; б) $x \leqslant -1$; в) $-5 \leqslant x \leqslant 2$; г) $0{,}5 < x < 1{,}5$.
2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:
а) $x = -2$; в) $x \leqslant 1$; д) $1{,}5 \leqslant y \leqslant 3{,}5$;
б) $y = 4$; г) $y \geqslant 0$; е) $-2 \leqslant x \leqslant 1$ и $2 \leqslant y \leqslant 4$.
3. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям
$$y = x^2 \text{ и } -2 \leqslant x \leqslant 2.$$
4. Постройте график зависимости:
а) $y = \begin{cases} x & \text{при } x \geqslant 1 \\ 1 & \text{при } x < 1; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} x^3 & \text{при } x \geqslant 0 \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$
5. На рисунке 5.55 изображен график температуры воздуха 1 апреля 2000 г. в городе N.
а) В какое время суток температура была равна 0°?
б) Когда в течение суток температура была положительной?
в) Какова была максимальная температура в этот день?

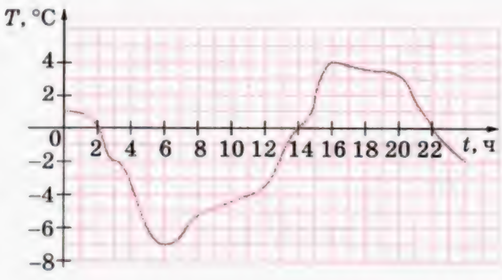


Рис. 5.55

6. На рисунке 5.56 изображен график движения туриста от турлагеря до станции. Используя график, ответьте на следующие вопросы:

а) Сколько километров прошел турист за первые 2 часа?

б) За сколько часов турист прошел 15 км?

в) Сколько времени турист отдыхал?

г) Сколько всего километров прошел турист?

д) Сколько всего часов шел турист?

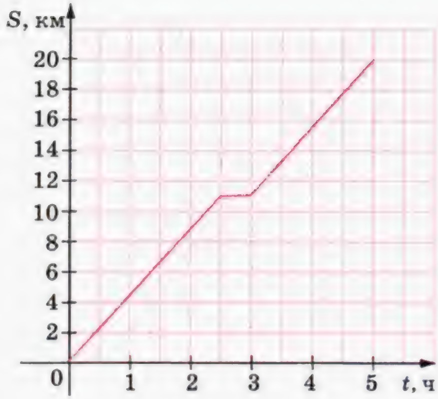


Рис. 5.56

Тест к главе 5

1. Установите соответствие между промежутками и их алгебраическим описанием:

а) $x \geqslant -2$; б) $x \leqslant -2$; в) $x \geqslant -6$; г) $x \leqslant -6$.

Ответ. 1) ______; 2) ______; 3) ______; 4) ______

2. Укажите число, не принадлежащее промежутку $-0{,}25 < x < 0{,}55$.

А. $\frac{1}{2}$. **Б.** $\frac{1}{4}$. **В.** $-\frac{1}{3}$. **Г.** $-\frac{1}{5}$.

3. На координатной прямой отмечены точки $A(-1{,}5)$ и $B(6)$. Найдите координату точки M, если известно, что $AM : MB = 1 : 2$.

Ответ. ____________

4. Установите соответствие между неравенствами в верхней и в нижней строке, задающими один и тот же числовой промежуток:

1) $4 < x < 16$; 2) $-10 < x < 10$; 3) $-8 < x < -2$.

а) $|x| < 10$; б) $|x + 5| < 3$; в) $|x - 10| < 6$.

Ответ. 1) ______; 2) ______; 3) ______

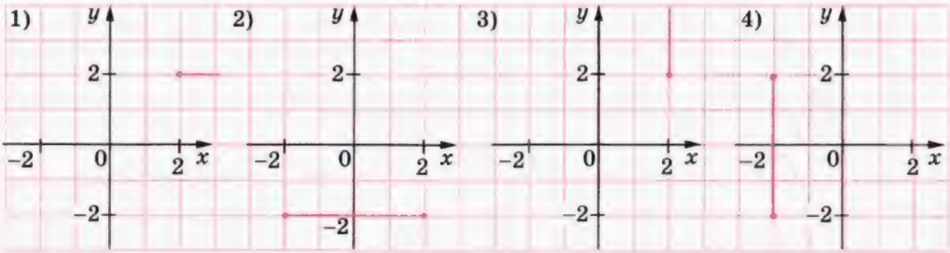
5. Каким равенством можно задать вертикальную прямую, проходящую через точку $M(-2;\ 6)$?

А. $x = -2$. **Б.** $x = 6$. **В.** $y = -2$. **Г.** $y = 6$.

6. Каким равенством можно задать горизонтальную прямую, проходящую через точку $M(a;\ b)$?

А. $x=a$. **Б.** $x=b$. **В.** $y=a$. **Г.** $y=b$.

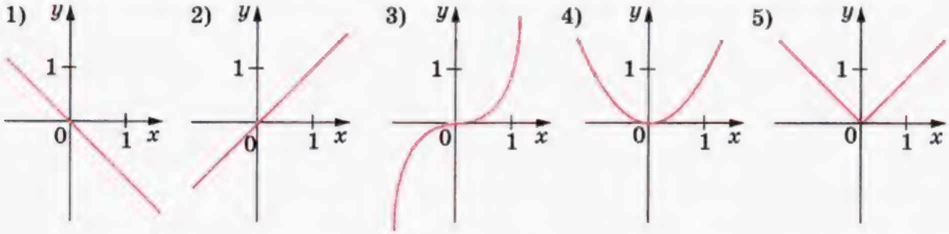
7. Установите соответствие между множеством точек и его алгебраическим описанием:



а) $x=2$ и $y\geqslant 2$; в) $y=-2$ и $|x|\leqslant 2$;
б) $y=2$ и $x\geqslant 2$; г) $x=-2$ и $|y|\leqslant 2$.

Ответ. 1) ______; 2) ______; 3) ______; 4) ______

8. Для каждого графика укажите его алгебраическое описание:



а) $y=x^3$; б) $y=x^2$; в) $y=x$; г) $y=|x|$; д) $y=-x$.

Ответ. 1) ______; 2) ______; 3) ______; 4) ______; 5) ______

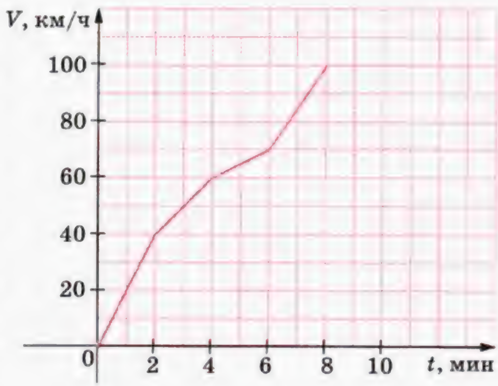
9. На рисунке изображен график изменения скорости автомобиля. Определите, на каком промежутке времени скорость автомобиля росла быстрее.

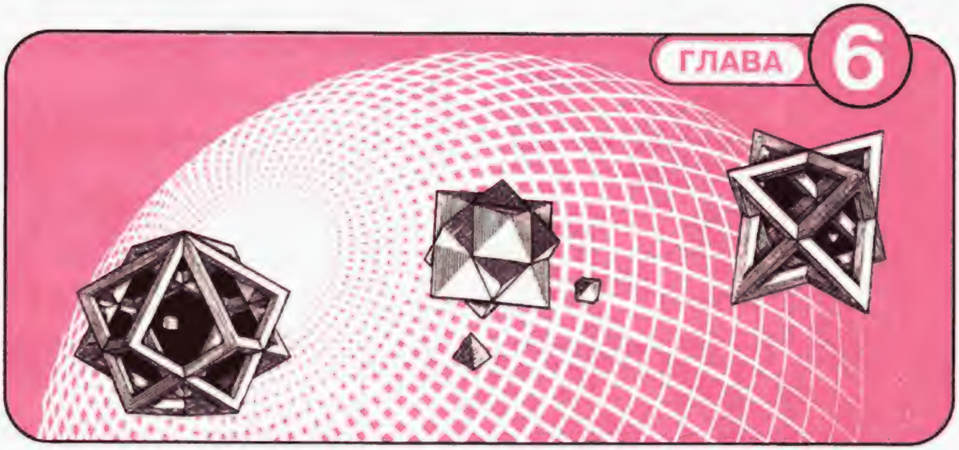
А. На промежутке от 0 мин до 2 мин.

Б. На промежутке от 2 мин до 4 мин.

В. На промежутке от 4 мин до 6 мин.

Г. На промежутке от 6 мин до 8 мин.





Свойства степени с натуральным показателем

6.1 Произведение и частное степеней

Напомним, что **определение степени с натуральным показателем** включает в себя разъяснение смысла этого термина для двух случаев: когда показатель степени больше 1 и когда он равен 1.

Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ множителей}}, \quad n > 1.$$

Степенью числа a с показателем, равным 1, называют само число a:

$$a^1 = a.$$

Рассмотрим некоторые свойства степени, которые часто используются при преобразовании выражений.

Возьмем произведение двух степеней с одинаковыми основаниями, например a^3a^4. Это выражение легко представить в виде степени с тем же основанием:

$$a^3a^4 = \underbrace{(aaa)}_{3 \text{ множ.}} \cdot \underbrace{(aaaa)}_{4 \text{ множ.}} = \underbrace{aaaaaaa}_{7 \text{ множ.}} = a^7.$$

Точно так же и в общем случае:

если a — любое число и m и n — любые натуральные числа, то

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Действительно,

$$a^m a^n = \underbrace{(aa \dots a)}_{m \text{ множ.}} \cdot \underbrace{(aa \dots a)}_{n \text{ множ.}} = \underbrace{aa \dots a}_{m+n \text{ множ.}} = a^{m+n}.$$

Таким образом,

при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складывают.

Это свойство распространяется на произведение трех и более степеней.

■ Пример 1. Упростим выражение y^5y^4y.

$$y^5y^4y = y^{5+4+1} = y^{10}.$$

Рассмотрим теперь частное двух степеней с одинаковыми основаниями, например $\frac{a^9}{a^5}$. (Здесь a — число, не равное 0, так как на 0 делить нельзя.) Представим a^9 в виде произведения a^5a^4, тогда дробь можно будет сократить на общий множитель a^5:

$$\frac{a^9}{a^5} = \frac{a^5a^4}{a^5} = a^4.$$

Точно так же и в общем случае:

если a — любое число, не равное 0, и m и n — любые натуральные числа, причем $m > n$, то

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Действительно,

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n a^{m-n}}{a^n} = a^{m-n}.$$

Таким образом,

при делении степеней с одинаковыми основаниями из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

■ Пример 2. Упростим выражение $\frac{x^{25}}{x^{20}}$.

$$\frac{x^{25}}{x^{20}} = x^{25-20} = x^5.$$

■ Пример 3. Сократим дробь $\frac{2a^8}{a^{12}c}$.

Числитель и знаменатель дроби можно разделить на общий множитель a^8:

$$\frac{2a^8}{a^{12}c} = \frac{2}{a^{12-8}c} = \frac{2}{a^4c}.$$

A

537. Запишите в виде степени:

а) x^3x^5; в) bb^4b^5; д) $xx^2x^3x^4$;

б) m^3m; г) cc^3c; е) $n^2n^2n^2$.

538. Упростите:

а) a^2b^3a; в) xx^4y^2y; д) $a^2c^4ac^{10}ac$;

б) $x^3a^2xa^5$; г) $ab^2c^3a^4b^5c^6$; е) $x^2yzx^2y^5z$.

539. Выполните умножение:

а) a^xa^y; б) x^nx^5; в) yy^n; г) c^nc^n.

Упростите выражение (**540—541**).

540. а) $2^2 \cdot 2^{10}$; в) $5 \cdot 5^n \cdot 5^2$; д) $7^k \cdot 7^k \cdot 7^2$;

б) $3^5 \cdot 3^2 \cdot 3$; г) $2^n \cdot 2^n \cdot 2$; е) $10^k \cdot 10^k \cdot 10^k$.

541. а) $(-x) \cdot x^2$; в) $(-x) \cdot (-x^2)$; д) $-x^2 \cdot (-x)^2 \cdot x$;

б) $(-x)^2 \cdot x$; г) $(-x) \cdot (-x^2) \cdot (-x)$; е) $-(-x)^2 \cdot (-x) \cdot x$.

542. Представьте выражение в виде произведения степеней различными способами: а) 5^8; б) 3^{12}.

543. Частное степеней замените степенью с тем же основанием:

а) $\frac{m^9}{m^2}$; в) $\frac{c^5}{c}$; д) $\frac{a^{18}}{a^8}$; ж) $\frac{y^{30}}{y^{24}}$;

б) $\frac{n^{10}}{n^9}$; г) $\frac{p^{10}}{p^2}$; е) $\frac{b^{43}}{b}$; з) $\frac{z^{34}}{z^{33}}$.

544. Выполните деление:

а) $a^7 : a^2$; в) $c^{30} : c^{10}$; д) $m^{50} : m^2$;

б) $b^{10} : b^5$; г) $x^{12} : x^4$; е) $y^{100} : y^{10}$.

545. (*Задание с выбором ответа.*) Какая из данных дробей равна выражению a^5?

I. $\frac{a^{10}}{a^2}$. II. $\frac{a^{10}}{a^5}$. III. $\frac{a^{10}}{b^2}$. IV. $\frac{a^{10}}{b^5}$.

А. Только I. **Б.** Только II. **В.** I и II. **Г.** II и IV.

546. Чему равно значение выражения?

а) $\frac{10^{23}}{10^{20}}$; б) $\frac{2^{31}}{2^{27}}$; в) $\frac{10^{17}}{10^{20}}$; г) $\frac{6^{112}}{6^{114}}$; д) $\frac{5^4}{5^8}$; е) $\frac{2^{100}}{2^{105}}$.

547. Во сколько раз 6^{12} больше, чем 6^{10}? 5^{118} меньше, чем 5^{121}?

548. Выполните деление:

а) $\frac{x^n}{x^2}$; б) $x^{n+2} : x^2$; в) $\frac{x^{n+1}}{x^n}$; г) $x^n : x$.

549. Упростите выражение:

а) $\frac{x^5 \cdot x^8}{x^3}$; в) $\frac{m^{20}}{m^8 \cdot m^8}$; д) $\frac{b^3 \cdot b \cdot b^7}{b^5 \cdot b^4}$;

б) $\frac{a^{90} \cdot a^{10}}{a^{50}}$; г) $\frac{y^{30}}{y^{15} \cdot y^{10}}$; е) $\frac{c^{12} \cdot c^2 \cdot c^6}{c \cdot c^{10} \cdot c^3}$.

550. Вычислите:

а) $\frac{3^{10} \cdot 3^5}{3^{12}}$; б) $\frac{2^{17}}{2^9 \cdot 2^3}$; в) $\frac{5^2 \cdot 5 \cdot 5^{16}}{5^7 \cdot 5^{10}}$; г) $\frac{10^8 \cdot 10^6}{10^2 \cdot 10^5 \cdot 10^5}$.

551. При каком значении k верно равенство:

а) $a^8 \cdot a^k = a^{12}$; в) $x^{15} : x^k = x^{10}$; д) $25 \cdot 5^6 = 5^k$;

б) $a^{20} = a^k \cdot a^{10}$; г) $x^k : x^8 = x^3$; е) $36 \cdot 6^k = 6^8$?

552. а) Зная, что $2^{10} = 1024$, найдите: 2^{12}; 2^8.

б) Зная, что $5^7 = 78\,125$, найдите: 5^5; 5^8.

553. Найдите значение выражения:

а) $(1{,}3 \cdot 10^3) \cdot (5 \cdot 10^2)$; б) $(2{,}4 \cdot 10^3) \cdot (3 \cdot 10^3)$; в) $\frac{3{,}2 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^6}$; г) $\frac{56 \cdot 10^{27}}{2{,}8 \cdot 10^{25}}$.

554. Упростите произведение:

а) $3a^3 \cdot 7a^2$; в) $9x \cdot (-4x^5)$; д) $3c \cdot 5c^2 \cdot 7c^3$;

б) $b^4 \cdot 5b^8$; г) $(-4a^2) \cdot (-5a)$; е) $y \cdot 4y^3 \cdot (-2y)$.

555. Выполните умножение:

а) $4xy \cdot 3y^7$; г) $2p^2c^3 \cdot 3p^2c$; ж) $6a^5b^3 \cdot (-4ab^2)$;

б) $2xy^2 \cdot 2xy^2$; д) $-m \cdot 4m^3n^4$; з) $-xy \cdot (-x^3y^2)$;

в) $10a^2b \cdot 0{,}1ab^5$; е) $-c^2d \cdot 2c^3d$; и) $-2a^2 \cdot (-0{,}5ax^4)$.

556. Упростите выражение:

а) $0{,}5x^3yz \cdot 4xyz$; в) $a^3xy \cdot 6ax^2y$; д) $-\frac{1}{2}bd \cdot (-4b^2c)$;

б) $0{,}2ab^3c \cdot 16a^3bc^3$; г) $5ac^4 \cdot (-\frac{1}{5}c^2d^2)$; е) $(-0{,}1xy) \cdot (-10xz^2)$.

Сократите дробь (**557—558**).

557. а) $\frac{36a^6}{9a^4}$; в) $\frac{8y^4 \cdot 6y^2}{12y^3}$; д) $\frac{4x \cdot 5x^4}{2x^5}$;

б) $\frac{12x^7}{6x^3}$; г) $\frac{5c \cdot 8c^4}{4c^3}$; е) $\frac{6m^3 \cdot 4m^3}{8m^5}$.

558. а) $\frac{xy^3}{y^9}$; в) $\frac{a^2b}{a^3b}$; д) $\frac{2m^4}{m^5n}$;

б) $\frac{z^5c}{z^7}$; г) $\frac{3y^3}{xy^4}$; е) $\frac{xy}{2y^3}$.

559. Упростите выражение:

а) $\frac{32x^4y^5}{-8x^3y^3}$; б) $\frac{-18m^2n^3}{-36mn^3}$; в) $\frac{49c^4x^6}{7c^8x^8}$; г) $\frac{11x^{14}z^4}{-33x^{15}z^3}$.

Б

560. Сравните значения выражений:

а) 10^{11} и $11 \cdot 10^{10}$; в) $(-4)^{18}$ и $-5 \cdot (-4)^{17}$;

б) $5 \cdot 10^7$ и $0,5 \cdot 10^8$; г) $-4 \cdot (-3)^{32}$ и $(-3)^{33}$.

561. Вычислите:

а) $\frac{5^7}{25 \cdot 125}$; б) $\frac{64 \cdot 32}{2^{10}}$; в) $\frac{16 \cdot 3^6}{81 \cdot 2^6}$.

562. Дана таблица степеней числа 3:

$3^1 = 3$;	$3^4 = 81$;	$3^7 = 2187$;	$3^{10} = 59\,049$;
$3^2 = 9$;	$3^5 = 243$;	$3^8 = 6561$;	$3^{11} = 177\,147$;
$3^3 = 27$;	$3^6 = 729$;	$3^9 = 19\,683$;	$3^{12} = 531\,441$.

1) Пользуясь этой таблицей, вычислите:

а) $729 \cdot 81$; б) $2187 \cdot 243$; в) $\frac{177147}{729}$; г) $\frac{59049 \cdot 6561}{2187}$.

2) Составьте несколько выражений, значения которых можно найти, пользуясь таблицей степеней числа 3.

563. Представьте выражение в виде степени с основанием a:

а) a^ka^{2k}; в) aa^ka^{2-k}; д) aa^ka^{k-1};

б) $a^{k+1}a^k$; г) $a^{k-1}a^2$; е) $a^{k+1}a^{k-1}$.

564. Представьте выражение в виде степени с основанием y:

а) $y^{k+1} : y^{k-1}$; б) $y^{3k} : y^{2k-2}$; в) $y^{10k} : y^{5k-1}$; г) $y^{2k+2} : y^2$.

565. Представьте выражение в виде произведения двух или нескольких степеней:

а) x^{n+m}; б) y^{2n}; в) a^{n+1}; г) b^{2n+1}.

566. Представьте выражение в виде дроби:

а) a^{m-n}; б) x^{m-2}; в) y^{10-m}; г) b^{m-1}.

567. Упростите выражение:

а) $\frac{x^n \cdot x^{20}}{x^{10}}$; б) $\frac{a^n \cdot a^{n+2}}{a^{2n}}$; в) $\frac{c^{8n}}{c^n \cdot c^{4n}}$; г) $\frac{y^{n+12}}{y^n \cdot y^{11}}$.

568. Представьте каждое из выражений в виде степени:

а) $2 \cdot 2^3$, $\quad 2^5 + 2^5$, $\quad 2^n + 2^n$, $\quad 2^n \cdot 2^n$;

б) $3 \cdot 3^4$, $\quad 3^6 + 3^6 + 3^6$, $\quad 3^n + 3^n + 3^n$, $\quad 3^n \cdot 3^n$.

569. Вычислите:

а) $\dfrac{5^n + 5^n + 5^n + 5^n + 5^n}{5^n + 5^n + 5^n + 5^n}$; $\qquad$ б) $\dfrac{\overbrace{100^n + 100^n + 100^n + \ldots + 100^n}^{\text{100 слагаемых}}}{\underbrace{100^n + 100^n + 100^n + \ldots + 100^n}_{\text{90 слагаемых}}}$.

6.2 Степень степени, произведения и дроби

Рассмотрим выражение $(a^2)^4$. Оно представляет собой степень с основанием a^2. Поэтому

$$(a^2)^4 = \underbrace{a^2a^2a^2a^2}_{\text{4 множ.}} = a^{\overbrace{2+2+2+2}^{\text{4 слаг.}}} = a^{2 \cdot 4} = a^8.$$

Точно так же и в общем случае:

если a — любое число и m и n — любые натуральные числа, то

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Докажем это:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \ldots a^m}_{n \text{ множителей}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ слагаемых}}} = a^{mn}.$$

Итак,

при возведении степени в степень показатели перемножают.

■ Пример 1. Упростим выражение $(a^5)^2$.

$$(a^5)^2 = a^{5 \cdot 2} = a^{10}.$$

Выясним теперь, как можно преобразовать степень произведения, например выражение $(ab)^3$:

$$(ab)^3 = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot (ab)}_{\text{3 множителя}} = \underbrace{(aaa)}_{\text{3 множ.}} \cdot \underbrace{(bbb)}_{\text{3 множ.}} = a^3b^3.$$

В общем случае:

если a и b — любые числа и n — любое натуральное число, то

$$(ab)^n = a^nb^n.$$

Докажем это:

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n\text{ множителей}} = \underbrace{(aa\ldots a)}_{n\text{ множ.}}\cdot\underbrace{(bb\ldots b)}_{n\text{ множ.}} = a^n b^n.$$

Итак,

при возведении в степень произведения возводят в эту степень каждый множитель и результаты перемножают.

Это свойство справедливо для произведения любого числа множителей.

■ Пример 2. Преобразуем выражение $(-2xy^2)^3$.

$$(-2xy^2)^3 = (-2)^3x^3(y^2)^3 = -8x^3y^6.$$

Рассмотрим степень дроби. Возьмем, например, выражение $\left(\frac{a}{b}\right)^3$. По определению степени

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}}_{3\text{ множ.}} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a}^{3\text{ множ.}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot b}_{3\text{ множ.}}} = \frac{a^3}{b^3}.$$

В общем случае:

если a и b — любые числа, причем $b \neq 0$, и n — любое натуральное число, то

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Действительно,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ множ.}} = \frac{\overbrace{aa\ldots a}^{n\text{ множ.}}}{\underbrace{bb\ldots b}_{n\text{ множ.}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Итак,

при возведении дроби в степень возводят в эту степень отдельно ее числитель и знаменатель.

■ Пример 3. Преобразуем выражение $\left(-\frac{2}{x}\right)^3$.

$$\left(-\frac{2}{x}\right)^3 = -\left(\frac{2}{x}\right)^3 = -\frac{2^3}{x^3} = -\frac{8}{x^3}.$$

А

570. Выполните действия:

а) $(y^5)^3$; в) $(n^8)^3$; д) $2(a^3)^5$; ж) $-4(y^4)^2$;
б) $(c^{12})^2$; г) $(b^{10})^{10}$; е) $0{,}3(x^2)^7$; з) $-(c^6)^2$.

571. Возведите в квадрат и в куб выражение:

а) 2^2, $(-2)^2$, -2^2; б) 2^3, $(-2)^3$, -2^3.

572. Представьте выражение в виде степени с основанием n:

а) n^5n^2, $n^5 : n^2$, $(n^5)^2$, $(n^2)^5$; б) $(n^k)^2$, n^kn^2, $n^k : n^2$, $(n^2)^k$.

573. Упростите выражение:

а) $a(a^2)^3$; в) $c^2c^5(c^2)^5$; д) $(k^{10}k^2)^3$; ж) $\left(\dfrac{x^7}{x^2}\right)^5$;

б) $(y^3)^4y^4$; г) $(x^4x)^5$; е) $\dfrac{(a^2)^{10}}{a^{15}}$; з) $\dfrac{y^{10}}{(y^2)^4}$.

574. Представьте a^{30} в виде степени с основанием:

а) a^2; б) a^3; в) a^5; г) a^{10}.

575. Представьте в виде степени с основанием 2 и, если возможно, с основанием -2:

а) 8^2; б) 16^3; в) 32^3; г) 8^{11}.

576. Выполните действия:

а) $(x^n)^m$, $(x^n)^n$, x^nx^n; б) $x^2(x^3)^4$, $x^n(x^3)^n$, $(x^nx^3)^3$.

577. При каком значении k верно равенство:

а) $y^k \cdot y^2 = y^{12}$, $(y^k)^2 = y^{12}$; б) $(a^5)^k = a^{20}$, $a^5 \cdot a^k = a^{20}$?

578. Возведите в степень:

а) $(xy)^4$; в) $(-10a)^3$; д) $(-cd)^2$; ж) $(-2ac)^4$;

б) $(5n)^2$; г) $(3ax)^3$; е) $(-xyz)^3$; з) $(\frac{1}{5}xyz)^3$.

579. Вычислите:

а) $5^4 \cdot 2^4$; б) $25^3 \cdot 4^3$; в) $0{,}2^8 \cdot 5^8$; г) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^4$.

580. Какое выражение должно быть записано в скобках:

а) $(...)^3 = 8x^3$; в) $(...)^3 = -27y^3$; д) $0{,}25a^6 = (...)^2$;

б) $(...)^2 = 81a^2$; г) $(...)^4 = 16c^4$; е) $-\dfrac{1}{8}b^6 = (...)^3$?

581. Выполните действия:

а) $(ab^2)^3$; в) $(2m^3)^2$; д) $(-10a^3)^3$; ж) $(-2a^2x)^5$;
б) $(-x^2y)^4$; г) $(4x^5)^2$; е) $(-6c^3)^2$; з) $(3ac^4)^4$.

582. Возведите в квадрат и в куб выражение:

а) $5c^5$; б) $-0{,}1y^4$; в) $-ab^2$; г) $\frac{1}{3}a^3b$.

583. Выполните возведение в степень:

а) $((x^2)^3)^2$; б) $(-(-x)^2)^3$; в) $(-(-x)^3)^2$; г) $-((-x)^3)^2$.

584. (*Задание с выбором ответа.*) Какое из выражений нельзя представить ни в виде квадрата, ни в виде куба?

А. $-27a^{12}b^6$. **Б.** $a^{18}b^{24}$. **В.** $-25a^8b^{10}$. **Г.** $0{,}04a^{20}b^6$.

585. Выполните возведение в степень:

а) $\left(\frac{x}{y}\right)^{10}$; б) $\left(\frac{a}{7}\right)^2$; в) $\left(\frac{2}{c}\right)^4$; г) $\left(-\frac{1}{c}\right)^4$; д) $\left(-\frac{x}{3}\right)^3$.

586. Возведите дробь в степень:

а) $\left(\frac{2x}{5}\right)^2$; в) $\left(\frac{3}{2a}\right)^3$; д) $\left(-\frac{1}{ab}\right)^2$; ж) $\left(-\frac{ab}{c}\right)^5$;

б) $\left(\frac{1}{x^4}\right)^5$; г) $\left(-\frac{y^2}{3}\right)^3$; е) $\left(\frac{x^2y}{2}\right)^4$; з) $\left(-\frac{3a}{4b}\right)^2$.

587. Вычислите:

а) $\frac{10^3}{2^3}$; в) $100^4 : 50^4$; д) $\frac{6^6}{3^6}$; ж) $7^3 : 14^3$;

б) $8^{12} : 2^{30}$; г) $25^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^6$; е) $9^5 : 3^9$; з) $16^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8$.

Упростите (**588–590**).

588. а) $3x \cdot (2x)^3$; г) $(x^2y)^3 \cdot (-x)$; ж) $-x \cdot (x^2y)^4$;

б) $4b \cdot (3b)^3$; д) $2y \cdot (-4y)^2$; з) $10a \cdot (10a)^3$;

в) $-2a \cdot (ab)^2$; е) $(-b)^3 \cdot 5ab$; и) $(-2m^3)^2 \cdot 5mn$.

589. а) $(a^2b)^2 \cdot (ab^2)^3$; г) $(-yz)^2 \cdot (2yz)^3 \cdot 0{,}5z$;

б) $(x^3y)^3 \cdot (xy^2)^3$; д) $((-0{,}1a^4b)^2)^3$;

в) $(-\frac{1}{2}m^2n)^2 \cdot (4mn^3)^2$; е) $-0{,}01c^3(-10ac^2)^2$.

590. а) $\frac{(2ab)^2}{4ab^3}$; в) $\frac{-81b^6c^3}{(3b^2c)^4}$; д) $\frac{-9(a^2c^3)^3}{(3a^3c^2)^3}$;

б) $\frac{24x^4y^3}{(2xy)^3}$; г) $\frac{(2a^2c^5)^2}{-(4a^2c^2)^3}$; е) $\frac{(x^2)^3(y^2)^2}{(x^3y^3)^3}$.

591. а) Докажите, что если сторону квадрата увеличить в 10 раз, то его площадь увеличится в 100 раз.

б) Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребро увеличить в n раз?

Б

592. Вычислите:

а) $\frac{5^{12}\cdot(5^4)^2}{(5^5)^4}$; б) $\frac{2^6\cdot(2^3)^5}{64^4}$; в) $\frac{(3^3)^2\cdot 27}{81^2}$; г) $\frac{25^6}{(5^3)^3\cdot 125}$.

593. Найдите значение выражения:

а) $\frac{5^2\cdot 2^4}{10^4}$; б) $\frac{4^3\cdot 3^8}{6^7}$; в) $\frac{27^3\cdot 25^5}{15^8}$; г) $\frac{(125\cdot 49)^3}{35^6}$.

594. Вычислите:

а) $0{,}25^{40}\cdot 4^{42}$; б) $2^{100}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{103}$; в) $\left(\frac{3}{4}\right)^{50}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{49}$; г) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{24}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{23}$.

Сравните **(595—596)**.

595. а) $3^{10}\cdot 5^8$ и 15^9; в) 81^{10} и $2^{20}\cdot 5^{20}$;
б) 6^{18} и $2^{20}\cdot 3^{16}$; г) 49^{15} и $2^{30}\cdot 3^{30}$.

596. а) 5^{20} и 55^{10}; б) 33^{15} и 3^{30}; в) 10^{30} и 1010^{10}; г) $10\,001^5$ и 99^{10}.

597. Представьте в виде степени:

а) $4^{2k}\cdot 8^k$; б) $6^{k-1}\cdot 2^{k+1}\cdot 3^{k+1}$; в) $27^{k+1}\cdot 9^{k-1}$; г) $10^k\cdot 25^k\cdot 2^{2k}$.

598. При каких значениях x выполняется равенство:

а) $2^{x+4}=64$, $2^x\cdot 2^3=64$, $(2^x)^3=64$;

б) $10^{3x+1}=10\,000$, $10^x\cdot 10^{x+1}=100\,000$, $(10^{x+1})^2=1\,000\,000$?

599. (*Задача-исследование.*) Имеются кубики с ребром, равным 3 единицам, 4 единицам, 5 единицам и т. д. Каждый кубик покрасили и разрезали на единичные кубики. Заполните таблицу, ответив для каждого случая на вопросы:

1) Сколько получилось единичных кубиков ?
2) Сколько кубиков, у которых покрашено три грани?
3) Сколько кубиков, у которых покрашено две грани?
4) Сколько кубиков, у которых покрашена одна грань?
5) Сколько получилось непокрашенных кубиков?

Длина стороны, ед.	Число единичных кубиков	Число кубиков, у которых			
		покрашено 3 грани	покрашено 2 грани	покрашена 1 грань	нет покрашенных граней
3					
4					
5					
6					
…					
n					

6.3 Решение комбинаторных задач

При решении комбинаторных задач приходится отвечать на вопросы типа: «Сколькими способами?», «Сколько существует вариантов?». Вам уже приходилось решать такие задачи. Рассмотрим еще несколько примеров.

■ Пример 1. Сколько существует различных вариантов кода дверного замка, если этот код состоит из двух цифр?

Первой в коде может стоять любая из десяти цифр. При каждом выборе первой цифры на второе место также можно поставить любую из десяти цифр. Значит, всего будет $10 \cdot 10 = 10^2$ вариантов кода.

Пусть теперь ситуация та же, но цифры кода должны быть разными. Сколько тогда существует вариантов кода?

Как и прежде, первой в коде может быть любая из десяти цифр. Но вторая цифра уже не может совпадать с первой. Поэтому для каждого выбора первой цифры остается девять способов выбрать вторую цифру. Значит, всего будет $10 \cdot 9 = 90$ вариантов кода.

Решение этих задач основано на так называемом **правиле умножения**. В общем виде это правило можно сформулировать так:

> если первый элемент некоторой пары можно выбрать m способами и для каждого из этих способов второй элемент можно выбрать n способами, то эту пару можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Заметим, что правило умножения распространяется и на выбор более чем двух элементов. Изменим, например, условие задачи с кодами: пусть требуется найти число кодов, составленных не из двух, а из трех различных цифр. Понятно, что для каждого набора первых двух цифр остается восемь вариантов выбора третьей цифры. Значит, в этом случае всего будет $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ вариантов кода.

Правило умножения очень полезно при решении многих комбинаторных задач, однако его нельзя применять механически, не задумываясь над смыслом и вопросом задачи.

■ Пример 2. В турнире участвовало 16 шахматистов, причем каждый с каждым сыграл по одной партии. Сколько всего было сыграно партий?

В каждой партии встречаются два шахматиста. Первым из них может оказаться любой из 16 участников турнира, а вторым — лю-

бой из 15 оставшихся. Рассуждая, как в предыдущих примерах, можно подумать, что всего было сыграно $16 \cdot 15 = 240$ партий.

Однако при таком подсчете каждая партия оказалась сосчитана дважды: один раз при подсчете партий, сыгранных первым игроком, и другой раз при подсчете партий второго игрока. Значит, на самом деле партий было сыграно вдвое меньше, т. е. число партий должно быть сосчитано так: $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$.

■ Пример 3. При передаче сообщений по телеграфу использовалась азбука Морзе. В этой азбуке каждая буква передается с помощью точек и тире. Например, буква **Е** закодирована точкой, а буква **Т** — тире. Понятно, что, чем короче последовательность знаков, обозначающая букву, тем лучше. Можно ли обойтись последовательностями не более чем в 4 знака, чтобы закодировать все буквы русского алфавита?

С помощью одного знака — точки или тире — можно закодировать 2 буквы. После первого знака опять можно поставить точку или тире. Значит, с помощью двух знаков можно закодировать $2 \cdot 2 = 4$ буквы. Из каждой последовательности из двух знаков получаются еще две приписыванием точки или тире, т. е. тремя знаками можно закодировать $4 \cdot 2 = 8$ букв. С помощью четырех знаков (точек и тире) можно закодировать $8 \cdot 2 = 16$ букв.

Итак, последовательностями из одного, двух, трех или четырех знаков (точек и тире) можно закодировать $2 + 4 + 8 + 16 = 30$ букв. А в русском алфавите 33 буквы, значит, придется использовать последовательности из пяти знаков.

А

600. а) На почте продается 40 разных конвертов и 25 разных марок. Сколько есть вариантов покупки конверта с маркой?

б) В театральном кафе предлагают три вида бутербродов, конфеты пяти сортов и два вида сока. Сколькими способами можно выбрать набор из бутерброда, конфеты и сока?

601. а) В забеге участвуют шесть мальчиков. Сколькими способами могут распределиться два первых места?

б) Сколько существует вариантов выбора спикера и вице-спикера парламента, если всего в парламенте 101 депутат?

602. а) В классе десять одноместных парт. Сколькими способами можно рассадить на них трех школьников?

б) В пассажирском поезде девять вагонов. Сколькими способами можно посадить в этот поезд четырех пассажиров, если требуется, чтобы все они ехали в разных вагонах?

603. Сколько существует четырехзначных чисел, составленных из нечетных цифр? из четных цифр? из четырех разных цифр?

604. Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся на 2? на 5? на 10?

605. а) В чемпионате по настольному теннису участвовало 40 спортсменов, и каждый с каждым сыграл по одной партии. Сколько всего сыграно партий?

б) На официальном приеме 50 человек обменялись рукопожатиями. Сколько было сделано рукопожатий?

в) В некоторой стране 25 городов, и каждые два соединены авиалинией. Сколько всего авиалиний в стране?

606. В конференции участвовало 20 человек, и каждый с каждым обменялся визитной карточкой. Сколько всего карточек понадобилось?

Б

607. Монету подбрасывают 5 раз подряд и каждый раз записывают, что выпало — орел или решка. Сколько разных последовательностей из орлов и решек может при этом получиться?

608. В компьютере каждый символ кодируется последовательностью, состоящей из восьми цифр — нулей и единиц. Например, символ «пробел» закодирован так: 00101000. Какое наибольшее число символов может быть таким образом закодировано?

609. Сколько сигналов можно поднять на мачте, если имеется четыре разных флага и каждый сигнал должен состоять не менее чем из двух флагов? (Сигналы, составленные из флагов, взятых в разном порядке, считаются различными.)

610. В латинском алфавите 26 букв. Будем считать словом любую последовательность, состоящую не более чем из пяти букв. Сколько всего таких слов?

6.4 Перестановки

В комбинаторных задачах часто ставится вопрос о том, сколькими способами можно расположить в ряд, или, как говорят математики, *упорядочить*, все элементы некоторого множества. Вот пример такой задачи:

В турнире четверо участников. Сколькими способами могут быть распределены места между ними?

Будем рассуждать в соответствии с правилом умножения. Первое место может занять любой из четырех участников. При этом второе место может занять любой из трех оставшихся, третье — любой из двух оставшихся, а на четвертом месте останется последний участник. Значит, места между участниками могут быть распределены $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами.

Каждое расположение элементов множества в определенном порядке называют **перестановкой**. Решив задачу, мы фактически подсчитали число перестановок для множества из четырех элементов. Рассуждая точно так же, можно показать, что для множества из пяти элементов число перестановок равно $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, а для множества из десяти элементов это число равно $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Вообще если множество содержит n элементов, то число перестановок равно произведению $n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Множители в этом произведении можно записать в обратном порядке:

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n.$$

Такие произведения бывают очень длинными и часто выражаются огромными числами. Однако в математике есть специальный символ для их обозначения. *Произведение всех натуральных чисел от* 1 *до* n *обозначают* $n!$ (читают: «n факториал»). Значение выражения $n!$ можно найти для любого натурального числа n (при этом считают, что $1! = 1$).

Факториалы растут удивительно быстро. Вы можете понаблюдать за их изменением, рассмотрев таблицу, в которой приведены факториалы чисел от 1 до 10:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40 320	362 880	3 628 800

А значение выражения 15!, которого нет в таблице, превосходит 10^{12}, а именно: $15! = 1\,307\,674\,368\,000$. Может быть, именно из-за быстрого роста факториалов восхищенный изобретатель этого выражения использовал восклицательный знак.

С помощью символа $n!$ принято записывать формулу для подсчета числа перестановок. Число перестановок для множества из n элементов обозначают через P_n (читают: «P из n», P — первая буква французского слова *permutation* — перестановка). Тогда

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

■ Пример 1. В расписании 7 класса на четверг должно быть шесть предметов: русский язык, литература, алгебра, география, физика, физкультура. Сколькими способами можно составить расписание на этот день?

Число способов, которыми можно составить расписание, равно числу перестановок из шести элементов:

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

■ Пример 2. Сколькими способами можно составить расписание из тех же шести предметов, если требуется, чтобы урок физкультуры был последним?

У урока физкультуры фиксированное место, поэтому расписания отличаются порядком остальных пяти предметов. Значит, число таких расписаний равно числу перестановок из пяти элементов:

$$P_5 = 5! = 120.$$

■ Пример 3. Сколькими способами из тех же шести предметов можно составить такое расписание, в котором русский язык и литература стоят рядом?

Будем рассматривать русский язык и литературу как один предмет, тогда всего предметов будет пять. Число способов, которыми можно составить расписание из пяти предметов, равно $P_5 = 5!$. Но в каждой из этих перестановок русский язык и литература могут меняться местами. Поэтому искомое число расписаний вдвое больше. Оно равно $5! \cdot 2 = 240$.

А

611. Вычислите: а) $4!$; б) $5!$; в) $4! + 5!$; г) $4! \cdot 5!$; д) $5 \cdot 4!$.

612. а) В конкурсе участвуют 8 школьников. Сколькими способами могут быть распределены места между ними?
б) Сколькими способами можно составить маршрут путешествия, проходящего через 7 городов?
в) Сколькими способами можно расставить на полке 10 различных книг?

613. Сколько можно изготовить различных флагов, расположив горизонтально три одинаковых по величине куска материи белого, синего и красного цвета?

614. Напомним, что анаграмма — это слово, полученное из данного слова перестановкой его букв (но необязательно имеющее смысл). Сколько существует различных анаграмм слова «график»? слова «интеграл»?

615. Из нечетных цифр составляют всевозможные пятизначные числа, не содержащие одинаковых цифр.
а) Сколько всего таких чисел?
б) Сколько таких чисел начинается с цифры 1?

616. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются пятизначные числа, в которых все цифры разные.
а) Сколько из них делится на 5?
б) Сколько из них не делится на 5?

617. Сколько пятизначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8?

Б

618. Сколько существует анаграмм слова: а) «факториал»; б) «перестановка»; в) «комбинаторика»?
Указание. а) Временно считайте две буквы «а» различными буквами (обозначьте их «$а_1$» и «$а_2$») и сосчитайте всевозможные анаграммы. Далее учтите, что те анаграммы, которые получаются перестановкой букв «$а_1$» и «$а_2$», на самом деле одинаковы.

619. Сколькими способами можно расставить на полке 10 книг, из которых 4 книги одного автора, а остальные — разных авторов, так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

620. Пять мальчиков и пять девочек занимают в театре в одном ряду места с 1-го по 10-е. Мальчики садятся на нечетные места, а девочки — на четные. Сколькими способами они могут это сделать?

621. Верно ли, что:

а) $10! = 10 \cdot 9!$; б) $10! = 2! \cdot 5!$; в) $\frac{12!}{11!} = 12$?

622. а) Делится ли 100! на 47? на 99? на 101? на 102?
б) Сколькими нулями оканчивается число 100!?

6.5 Круговые перестановки

(Для тех, кому интересно)

Иногда условие задачи можно понять по-разному, и тогда при переводе условия на математический язык получаются разные задачи, в которых не совпадают ни решения, ни ответы. И это вовсе не значит, что один из получившихся ответов правильный, а другой нет.

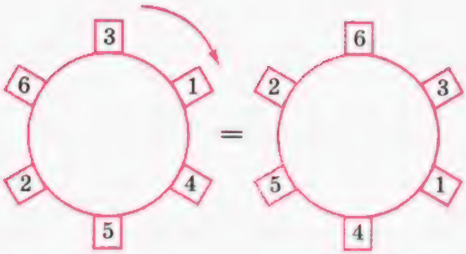


Рис. 6.1

Давайте исследуем эту проблему на примере комбинаторных задач на «перестановки по кругу».

Сколько, например, существует вариантов расположения шести гостей за шестиместным столом?

Эта задача имеет разные решения и соответственно разные ответы в зависимости от того, что понимать под различным расположением гостей за столом.

Если считать, что нам важно, кто на каком стуле сидит, то это простая задача на перестановки, и всего будет $6! = 720$ различных вариантов посадить гостей за стол.

Однако часто бывает важно не то, кто какой стул занял, а то, кто с кем сидит рядом, т. е. взаимное расположение гостей.

Это уже совсем другая задача. Теперь расположения, получаемые одно из другого при одновременном перемещении всех гостей вокруг стола без изменения их взаимного расположения (рис. 6.1), надо считать одинаковыми. Ясно, что для любого расположения гостей таких одинаковых вариантов, получаемых один из другого поворотом, шесть. Значит, $6!$ надо разделить на 6. Так как $6! : 6 = 5!$, то получается только 120 различных вариантов.

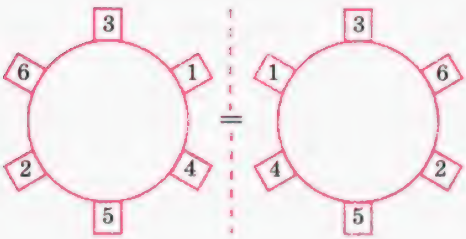


Рис. 6.2

Но если нас интересует только взаимное расположение гостей, то одинаковыми можно считать и такие симметричные расположения, при которых у каждого гостя остаются те же соседи за столом, только левый и правый соседи меняются местами (рис. 6.2).

При таком понимании общее число различных расположений гостей вокруг стола будет еще вдвое меньше: $120 : 2 = 60$.

623. а) Сколько имеется вариантов рассадить президентов «большой восьмерки» за восьмиместным круглым столом переговоров?

б) Сколькими способами десять приятелей могут сесть на десятиместную карусель?

624. Двенадцать девочек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

625. Сколько ожерелий можно составить из 20 различных бусин?

ДЗ Дополнительные задания к главе 6

Преобразование выражений, содержащих степени

626. Упростите выражение:

а) $\dfrac{5a^2b^8c^3}{25a^5bc^2}$; б) $\dfrac{24a^5b^6}{48a^5b^3}$; в) $\dfrac{16xyz^7}{24x^2y^3z^2}$; г) $\dfrac{36x^5yz^5}{12x^6y^2z^5}$.

627. Запишите произведение:
а) $32 \cdot 128$ в виде степени числа 2;
б) $162 \cdot 81$ в виде степени числа 3;
в) $125 \cdot 625$ в виде степени числа 5;
г) $0{,}00001 \cdot 0{,}0001$ в виде степени числа 0,1.

628. Выполните действия:

а) $12 \cdot \left(\dfrac{x^3}{4}\right)^2$; б) $\dfrac{1}{8} \cdot \left(\dfrac{2a^2}{b}\right)^3$; в) $\left(\dfrac{3c}{2}\right)^3 \cdot \left(-\dfrac{c^2}{3}\right)^2$; г) $\left(\dfrac{3y}{2}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$.

629. Найдите значение выражения при заданных значениях переменной:

а) $\dfrac{(2x)^4}{(4x)^2}$ при $x = -\dfrac{2}{3}$; в) $\dfrac{(2a)^3(2a)^2}{(4a)^2}$ при $a = -0{,}1$;

б) $\dfrac{(9y)^3}{(3y)^5}$ при $y = \dfrac{1}{3}$; г) $\dfrac{(4c)^5(2c)^6}{(4c)^6}$ при $c = -0{,}5$.

630. Упростите выражение:
а) $2^{2n} \cdot 16$; б) $2^3 \cdot 8^n$; в) $25^n \cdot 125^5$; г) $9^4 \cdot 81^{2n}$.

631. Какое выражение надо подставить вместо a, чтобы полученное равенство было верным:
а) $a^2 = x^{20}$; б) $a^5 = -x^{15}$; в) $x^{11} = a^3 \cdot x^5$; г) $(-x)^3(-x)^6 = a^3$?

632. Найдите:
а) 5^{m+2}, если $5^m = c$; в) 2^{m-1}, если $2^m = y$;
б) 6^{2m+1}, если $6^m = a$; г) $3^{3(m-1)}$, если $3^m = p$.

633. Решите задачу, представив данные с помощью степени числа 10. (При вычислениях используйте калькулятор.)

а) Ростовская область занимает территорию в 100,8 тыс. км^2, а ее население составляет 4,1 млн человек. Какова плотность населения Ростовской области (число человек на 1 км^2)?

б) Радиус Земли приближенно равен 6,37 тыс. км. Вычислите площадь ее поверхности (в млн кв. км) по формуле площади поверхности сферы $S = 4\pi R^2$, где R — радиус сферы, $\pi \approx 3{,}14$.

Комбинаторные задачи

634. Ваня знает, что номер телефона его друга состоит из четырех цифр 1, 2, 3, 4, но не помнит, в каком порядке их надо набирать. Сколько вариантов в худшем случае ему придется перебрать, чтобы дозвониться до друга?

635. Мальчикам одной школы дали список из пяти известных футболистов: Дмитрий Аленичев, Дмитрий Булыкин, Александр Мостовой, Игорь Семшов, Алексей Смертин. Каждый из мальчиков должен был присвоить футболистам места с первого по пятое в соответствии со своими симпатиями. Будут ли среди списков, полученных в результате такого опроса, одинаковые, если в школе учится 128 мальчиков?

636. Сколько можно составить пятизначных чисел, меньших 7000, из цифр 1, 3, 5, 7, 9 (без повторения цифр)?

637. Номера телефонов компании «Мобильная связь» состоят из 11 цифр, причем первой цифрой должна быть цифра 8, второй — цифра 5, третьей — цифра 0. На четвертом и пятом местах не может стоять цифра 0. Определите, сколько номеров телефонов может предложить эта компания.

638. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 4, 5, 6, 8, используя в числе каждую цифру только один раз? Сколько среди них четных чисел и сколько нечетных?

639. Команда из шести гимнасток готовится к выполнению упражнения на брусьях. Сколькими способами можно установить их очередность, если:

а) Ира должна выступить первой;
б) Ира должна выступить первой, а Зоя последней;
в) Ира и Зоя должны выступать одна за другой;
г) Ира должна выступать первой или второй?

640. На скамью надо посадить трех мальчиков и трех девочек так, чтобы мальчик и девочка чередовались. Сколькими способами можно рассадить детей таким образом? Указание. Посадите мальчиков сначала на четные места, а потом на нечетные.

641. Тест по математике для 7 класса содержит 10 заданий, в которых из 4 предложенных ответов нужно выбрать один верный. Допустим, что кто-либо из семиклассников, ничего не зная, будет просто наугад отмечать один из ответов. Сколько вариантов выбора ответов у него существует? Сколько вариантов выбора ответов наугад существует для теста, в котором n заданий и для каждого задания предлагается 3 ответа? n заданий и для каждого задания предлагается m ответов?

642. Игральный кубик подбрасывают 5 раз и каждый раз записывают число выпавших очков. Результатом эксперимента является последовательность из пяти цифр.

а) Каково число возможных результатов эксперимента?

б) Сколько существует результатов эксперимента, в которых ни разу не встречается шестерка?

в) Сколько существует результатов эксперимента, в которых хотя бы раз встречается шестерка?

643. Сколько существует четырехзначных чисел, в записи которых встречается хотя бы одна четная цифра?

644. Сколько существует десятизначных чисел, в записи которых имеются хотя бы две одинаковые цифры?

Вопросы для повторения к главе 6

1. Сформулируйте определение степени с натуральным показателем.
2. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примере правило умножения степеней с одинаковыми основаниями. Докажите соответствующее свойство степени.
3. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примере правило деления степеней с одинаковыми основаниями. Докажите соответствующее свойство степени.
4. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примере правило возведения степени в степень. Докажите соответствующее свойство степени.
5. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примере правило возведения в степень произведения. Докажите соответствующее свойство степени.
6. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примере правило возведения в степень дроби. Докажите соответствующее свойство степени.
7. Запишите формулу для подсчета числа перестановок. Приведите пример задачи, в которой нужно подсчитать число перестановок.

Задания для самопроверки к главе 6

(Обязательные результаты обучения)

1. Выполните действие, воспользовавшись соответствующим свойством степени:

а) $a^5 \cdot a^3$; б) $a^8 : a^6$; в) $(a^2)^4$; г) $(ab)^6$; д) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$.

2. Выполните действие:

а) $a^2 \cdot a^n$; б) $a^n : a^2$; в) $(a^n)^2$.

3. Упростите выражение: а) $x^4 \cdot (x^3)^2$; б) $\dfrac{x^2 x^9}{x^5}$.

4. Вычислите:

а) $\dfrac{5^4 \cdot 5^5}{5^7}$; б) $0{,}2^{10} \cdot 5^{10}$; в) $\dfrac{10^6}{5^6}$; г) $\dfrac{8^{20}}{2^{62}}$.

5. Упростите выражение:

а) $-3xy^3 \cdot 2xy^2$; б) $(-2a^2b)^3$; в) $(-x^3y^2)^4$.

6. Сократите дробь: а) $\dfrac{c^5 \cdot x^2}{c^3 x}$; б) $\dfrac{12a^3c}{18a^2c^3}$.

7. Сколько существует трехзначных чисел, составленных из нечетных цифр (все цифры в записи числа различны)?

8. Сколькими способами можно построить в ряд 5 человек?

Тест к главе 6

1. Упростите выражение $a^2b^3aba^3$.

А. a^5b^3. **Б.** a^6b^3. **В.** a^6b^4. **Г.** $(ab)^{10}$.

2. Выполните умножение $a^2 \cdot a^n$.

Ответ. ____________

3. Значение какого из выражений равно 2^{11}?

А. $2^{12} - 2$. **Б.** $2^{12} : 2$. **В.** $2^{22} : 2$. **Г.** $2^{22} : 2^2$.

4. Какая из дробей равна выражению a^{k-1}?

А. $\dfrac{a^k}{a}$. **Б.** $\dfrac{a^{k-1}}{a}$. **В.** $\dfrac{a^{k+1}}{a^{k-1}}$. **Г.** $\dfrac{a^k}{a^{k-1}}$.

5. Для каждого выражения из верхней строки укажите равное ему выражение из нижней строки.

1) $a^{10} \cdot a^2$; 2) $(a^{10})^2$; 3) $a^{10} : a^2$; 4) $(a \cdot a^{10})^2$.

а) a^5; б) a^8; в) a^{12}; г) a^{20}; д) a^{22}.

Ответ. 1) __________; 2) __________; 3) __________; 4) __________

6. Известно, что $5^5 = 3125$. Найдите 5^6.

Ответ. ____________

7. Упростите выражение $\dfrac{a^9 \cdot a^3}{a^{10}}$ и найдите его значение при $a = -\dfrac{1}{3}$.

Ответ. ____________

8. Упростите выражение $(-x)^2(-x)^3(-x^3)^2$.

А. x^{36}. **Б.** $-x^{36}$. **В.** x^{11}. **Г.** $-x^{11}$.

9. Возведите в куб выражение $-2a^{20}c^{12}x$.

А. $8a^{60}c^{36}x^3$. **Б.** $-8a^{60}c^{36}x^3$. **В.** $2a^{60}c^{36}x$. **Г.** $-2a^{60}c^{36}x$.

10. Выполните действие $\left(\frac{3x}{y^3}\right)^2$.

А. $\frac{9x^2}{y^6}$. **Б.** $\frac{6x^2}{y^6}$. **В.** $\frac{3x^2}{y^3}$. **Г.** $\frac{3x^2}{y^6}$.

11. Какое из данных выражений можно представить в виде $(a^3b)^2$?

А. a^6b^2. **Б.** $-a^6b^2$. **В.** a^5b^2. **Г.** $-a^5b^2$.

12. Какое из данных выражений нельзя представить ни в виде квадрата, ни в виде куба?

А. a^3c^6. **Б.** $-a^3c^6$. **В.** $-a^2c^2$. **Г.** $(-a)^2b^2$.

13. Вычислите $\frac{7^5 \cdot (7^4)^2}{(7^5)^3}$.

Ответ. ____________

14. Найдите значение выражения $\frac{8^2 \cdot 9^5}{6^8}$.

А. $\frac{1}{24}$. **Б.** $2\frac{1}{4}$. **В.** $1\frac{1}{2}$. **Г.** 1296.

15. При каком значении x верно равенство $2^x \cdot 2^5 = 1024$?

А. При $x = 2$. **Б.** При $x = 3$. **В.** При $x = 5$. **Г.** При $x = 10$.

16. Какое из следующих неравенств неверно?

А. $9^{10} < 3^{21}$. **Б.** $9^{10} < 5^{20}$. **В.** $6^{10} < 3^{20}$. **Г.** $6^{10} < 2^{20}$.

17. Какому из выражений равна сумма $5^n + 5^n + 5^n + 5^n + 5^n$?

А. 5^{n+1}. **Б.** 5^{5n}. **В.** $(5^n)^5$. **Г.** 5^{n+5}.

18. Сколько можно составить двузначных чисел, у которых в разряде десятков записана четная цифра, а в разряде единиц — нечетная?

А. 9. **Б.** 10. **В.** 20. **Г.** 25.

19. На вечеринке присутствовало 8 человек, и каждый из них обменялся с каждым фотографией. Сколько всего фотографий для этого понадобилось?

А. 8. **Б.** 15. **В.** 28. **Г.** 56.

20. В среду в 6 классе 5 уроков. Сколькими способами можно составить расписание на этот день, если 2 из этих уроков — математика и они должны идти один за другим, а остальные уроки по разным предметам?

А. 3!. **Б.** 4!. **В.** 5!. **Г.** 6!.

Многочлены

7.1 Одночлены и многочлены

Рассмотрим выражения $3ac$, $-x^2y$, b^{10}, $2a^2b\cdot(-5)b^2c$. Все они составлены из чисел и переменных с помощью одного только действия — умножения. (Напомним, что возведение в степень — это тоже умножение.) Такие выражения называют **одночленами**. Числа и переменные также считают одночленами.

Одночлен $2a^2b\cdot(-5)b^2c$, как вы знаете, можно упростить:

$$2a^2b\cdot(-5)b^2c = 2\cdot(-5)a^2bb^2c = -10a^2b^3c.$$

В получившемся произведении только один числовой множитель, и он записан на первом месте. Каждая переменная (в соответствующей степени) содержится в нем тоже только один раз. Такой одночлен называют *одночленом стандартного вида.*

К одночленам стандартного вида относятся также числа, переменные, степени переменных.

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют *коэффициентом одночлена.*

Алгебраическую сумму одночленов называют **многочленом.** Вот примеры многочленов:

$$a^3-2a^2+a,\quad 5b-c,\quad 3xy-y+4x-7.$$

Одночлены, из которых составлен многочлен, называют *членами многочлена.* Так, членами многочлена $3xy-y+4x-7$ являются одночлены $3xy$, $-y$, $4x$ и -7.

Многочлен, состоящий из двух членов, называют *двучленом*, а из трех членов — *трехчленом*. Одночлены принято рассматривать как частный случай многочленов — считают, что это многочлены, состоящие из одного члена.

Если все члены многочлена являются одночленами стандартного вида и среди них нет подобных членов, то такой многочлен называют *многочленом стандартного вида*.

Представим в стандартном виде многочлен

$$3ab - a^2 + b - 2ab + 5b.$$

Для этого достаточно привести подобные слагаемые, т. е. подобные члены этого многочлена:

$$\underline{3ab} - a^2 + \underline{\underline{b}} - \underline{2ab} + \underline{\underline{5b}} = ab - a^2 + 6b.$$

Если многочлен стандартного вида содержит одну переменную, то его члены обычно располагают в порядке убывания ее степеней. При этом *свободный член многочлена*, т. е. член, не содержащий буквы, помещают на последнем месте.

Например, многочлен $5x^2 - 1 - x^3 + 4x$ записывают так:

$$-x^3 + 5x^2 + 4x - 1.$$

Наибольший показатель степени, в которой переменная входит в этот многочлен, равен 3. Говорят, что $-x^3 + 5x^2 + 4x - 1$ — *многочлен третьей степени*.

А

645. Перечислите все члены многочлена и укажите коэффициенты членов, содержащих буквенные множители:

а) $-3x^4 + 2x^2 - x - 10$;
в) $m^3 + 2m^2 - 9m + 2$;
б) $8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$;
г) $2c^3 - 2c^2d - c^2 + cd + 3c - 3d$.

646. Представьте в стандартном виде многочлен:

а) $6a \cdot 0{,}5 - 3a \cdot 2x + 2a \cdot 7a$;
б) $8x^2 - 4x + x + 1$.

647. Запишите многочлен, расположив его члены по убыванию степеней переменной, и укажите его степень:

а) $19z^2 - 8z + z^4 - 7 - 3z^3$;
б) $2y^3 + 5y^2 - 3y^4 + y^5 - 1$.

648. Расположите многочлен по убывающим степеням буквы a:

а) $2ab + 3a^3 + a^2b^2$;
б) $a^4x + a^2x^3 + ax^2 + a^3x$.

649. Найдите значение выражения:

а) $0{,}4x - 10$ при $x = -15$;
в) $6a + 0{,}5b$ при $a = \frac{2}{3}$, $b = -2$;
б) $1 - \frac{1}{3}a$ при $a = 18$;
г) $0{,}3x - 0{,}1y$ при $x = -4$, $y = -10$.

650. Найдите значение выражения $y^4 + 2y^2 - 5y + 1$:

а) при $y = -1$;
б) при $y = 1$;
в) при $y = 0$;
г) при $y = \frac{1}{2}$.

651. Найдите значение данного многочлена при $a = -0,5$:

а) $2a^2 + a - 7$; б) $-0,4a^2 + 0,3a - 1$.

652. Вычислите:

а) $p - 0,5c^3$ при $p = -6$, $c = -5$;

б) $x^3 - 4xy$ при $x = 0,2$, $y = 0,1$.

653. Число диагоналей многоугольника с n вершинами вычисляется по формуле $D = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$. Сколько диагоналей имеет:

а) шестиугольник; б) восьмиугольник; в) двенадцатиугольник; г) стоугольник?

654. Сумму последовательных натуральных чисел от 1 до n можно вычислить по формуле

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n.$$

Используя формулу, вычислите сумму последовательных натуральных чисел: а) от 1 до 20; б) от 1 до 100.

Приведите подобные члены многочлена **(655—656)**.

655. а) $12n^2 + 5m - n^2 - 4m$; в) $2m^3 + n^2 - 1 - n^2 + 2m^3$;

б) $-a^2 - b^2 + 2a^2 - b^2$; г) $3x^3 - 2y - 5x^3 - 2 + 2y - 7$.

656. а) $0,5c^4 + 0,3c^2 + c^3 - 0,5c^2$; г) $\frac{1}{2}m^5 - \frac{1}{4}m^3 + m^3 - \frac{3}{4}m^5$;

б) $1,4z^3 - 0,1z^2 - 0,4z^3 + 1$; д) $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x^3 - x - \frac{2}{3}x^3 + 3$;

в) $a^2 + a + \frac{1}{4}a^2 - a$; е) $\frac{2}{5}b^2 + b - \frac{3}{5}b^2 + \frac{1}{4}b$.

657. Упростите:

а) $3a^2b - ab^2 - a^2b + 2ab^2$; в) $10xy - xy^2 - 10xy + x^2y$;

б) $mn - 7mn^2 - mn - 7mn^2$; г) $5xz^2 - 4x^2z + xz - 5xz^2$.

Б

658. Дан многочлен $2a^4 - 3a^3 - a^2 + 5a - 1$. Подставьте вместо a:

а) $2x$; б) $-x$; в) $3x^2$; г) $-2x^3$.

659. Сумму квадратов натуральных чисел от 1 до n можно вычислить по формуле

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3.$$

Вычислите сумму квадратов натуральных чисел для:

а) $n = 10$; б) $n = 50$.

660. Сумму кубов натуральных чисел от 1 до n можно вычислить по формуле $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$.

Вычислите сумму кубов натуральных чисел для:

а) $n = 10$; б) $n = 50$.

661. Упростите:

а) $5xy^2 - 3x^2y - xy + 5x^2y - 6xy^2 + xy$;

б) $8a^3 - 6a^2b + b^2 - 8a^3 + 3a^2b - 3b^2$;

в) $3x^4y + 2x^4 - xy^4 + 2x^4 + 2x^4y - 4x^4$;

г) $6a^3b^2 - a^2b^3 - 7a^3b^2 - a^2b^3 + 5a^3 - a^3b^2$.

662. Предложение «Число, в котором в разряде сотен записана цифра x, в разряде десятков — цифра y, в разряде единиц — цифра z» коротко записывают так: $\overline{xyz}$. Такое число может быть представлено в виде многочлена: $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$.

Представьте в виде многочлена число:

а) $\overline{xy}$; б) $\overline{yz}$; в) $\overline{abc}$; г) $\overline{cba}$; д) $\overline{mnpq}$; е) $\overline{qpnm}$.

663. Докажите, что:

а) четырехзначное число, записанное одинаковыми цифрами, делится на 11;

б) трехзначное число, записанное одинаковыми цифрами, делится на 37; не делится на 11.

7.2 Сложение и вычитание многочленов

Найти сумму или разность двух многочленов очень просто. Фактически вы уже умеете это делать.

Чтобы сложить два многочлена, нужно составить их сумму, раскрыть скобки и, если возможно, упростить получившееся выражение.

■ Пример 1. Сложим многочлены $2x^2 - 2xy + y^2$ и $3xy - y^2$:

$$(2x^2 - 2xy + y^2) + (3xy - y^2) =$$
$$= 2x^2 - \underline{2xy} + \underline{\underline{y^2}} + \underline{3xy} - \underline{\underline{y^2}} = 2x^2 + xy.$$

Суммой данных многочленов является многочлен $2x^2 + xy$.

Чтобы из одного многочлена вычесть другой, нужно составить их разность, раскрыть скобки и, если возможно, упростить получившееся выражение.

■ Пример 2. Вычтем из многочлена $2x^2 - 2xy + y^2$ многочлен $3xy - y^2$:

$$(2x^2 - 2xy + y^2) - (3xy - y^2) =$$
$$= 2x^2 - \underline{2xy} + \underline{\underline{y^2}} - \underline{3xy} + \underline{\underline{y^2}} = 2x^2 - 5xy + 2y^2.$$

Разностью данных многочленов является многочлен $2x^2-5xy+2y^2$.

Вообще, результатом сложения и вычитания многочленов является многочлен.

Вы знаете, что если перед числом поставить знак «−», то получится число, ему противоположное. Сумма противоположных чисел равна 0: $a + (-a) = 0$.

Точно так же выражение, противоположное, например, сумме $2x - y + 5$, есть $-(2x - y + 5)$. Так как

$$-(2x - y + 5) = -2x + y - 5,$$

то выражение, противоположное многочлену $2x - y + 5$, есть многочлен, составленный из тех же членов, но взятых с противоположными знаками. Чтобы доказать, что два многочлена противоположны, достаточно убедиться, что их сумма равна 0.

Сумму и разность многочленов с одной переменной удобно вычислять в столбик, подписывая друг под другом подобные члены.

■ Пример 3. Найдем сумму и разность многочленов

$$x^3 + 2x^2 + x + 1 \text{ и } x^3 - 2x^2 - x + 1:$$

$$+\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 + x + 1 \\ x^3 - 2x^2 - x + 1 \\ \hline 2x^3 \qquad\qquad + 2 \end{array} \qquad\qquad +\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 + x + 1 \\ -x^3 + 2x^2 + x - 1 \\ \hline 4x^2 + 2x \qquad \end{array}$$

Обратите внимание: вычитание мы заменили сложением с многочленом, противоположным второму многочлену.

А

664. Выполните сложение:

а) $(3a^2 - 2a) + (-a^2 + 3a)$;
б) $(6c^2 - 2cd) + (10c^2 + 18cd)$;
в) $(14mn - 15m) + (-15mn - 14m)$;
г) $(3a^2 - 7b^2) + (6b^2 - 2a^2)$.

665. Раскройте скобки:

а) $(5x^3 - 3x^2 - 7) + (4 + 3x^2 - 5x^3)$;
б) $(z^2 - 3z + 2) + (4z + 8) + (3z^2 - 5)$;
в) $(3t^3 - 4t^2 + 7t) + (2t^2 - 6t + 7)$;
г) $(2a^2 + 5a) + (-a^2 + a) + (a^2 - 3a - 5)$.

666. Упростите выражение:

а) $(7x + y) - (-x - 2y)$;
б) $(b - 3) - (2b + 2)$;
в) $(x^2 - 3x) - (2x + 1)$;
г) $(5b^2 + 2b) - (4b^2 - 3b)$.

667. Раскройте скобки:

а) $(10a - 2b + 5c) - (-5a + 20b - c)$;
б) $(16m - 11n - 7mn) - (6mn - 10n + 16m)$;

в) $(c^2 + 3cd - d^2) - (4cd + 5d^2 - 6c^2)$;
г) $(3b^3 - 2ab + a^3) - (2ab + 3b^3)$.

668. Составьте сумму и разность многочленов и упростите получившиеся выражения:
а) $6a^2 - 3a + 1$ и $6a^2 - 1$;
б) $n^3 + 2n^2 - n + 1$ и $1 - n^3$;
в) $k^3 - 3k^2 + 1$ и $2k^3 - 3k^2 + 4$;
г) $3x^2 - 2x + 7$ и $2x^2 + 2x + 7$.

669. Раскройте скобки:
а) $(x - y) + (y - x) - (x + y)$;
б) $(m + n) - (n + p) - (m + p)$;
в) $(m - n) + (n - c) - (m - c)$;
г) $(a + b - c) + (a - b + c) - (a - b - c)$.

670. Запишите многочлен, который надо прибавить к трехчлену $3a^3 - 2a^2 + 1$, чтобы сумма оказалась равной:
а) 10; б) a^3; в) $-3a^2$.

671. Какой двучлен надо прибавить к данному двучлену, чтобы в сумме получился 0:
а) $a + b$; б) $x - y$; в) $m - n$?

672. Докажите, что:
а) двучлены $a - b$ и $b - a$ противоположны;
б) двучлены $a + b$ и $-a - b$ противоположны.

673. Раскройте скобки:
а) $-(a + b)$;
б) $-(m - n)$;
в) $-(-c - b)$;
г) $-(x - y - z)$;
д) $-(3a + 2b - c)$;
е) $-(5z - x + y)$.

674. Убедитесь в том, что данные многочлены противоположны, и найдите значение каждого из них при заданных значениях переменных:
а) $x - y - z$ и $y + z - x$ при $x = 0{,}3$, $y = -0{,}2$, $z = -0{,}1$;
б) $x^2 + 2x - 1$ и $1 - 2x - x^2$ при $x = -\frac{1}{3}$.

675. Представьте многочлен в виде суммы и в виде разности двух каких-либо двучленов (проверьте, раскрыв мысленно скобки, правильно ли вы выполнили задание):
а) $a - b - c + d$; б) $m + n - p + q$.

676. (*Задание с выбором ответа.*) Многочлен $x^3 - x^2 - x + 1$ представили в виде разности двучленов. Укажите эту разность среди приведенных ниже ответов.
А. $(x^3 - x^2) - (x + 1)$.
Б. $(x^3 - x) - (x^2 + 1)$.
В. $(x^3 + 1) - (x^2 - x)$.
Г. $(1 - x) - (x^2 - x^3)$.

Б

677. Упростите выражение, расположив слагаемые в столбик:
а) $(p^2 + q^2 - r^2) + (q^2 + r^2 - p^2) + (r^2 + p^2 - q^2) + (r^2 - p^2 - q^2)$;
б) $(a - b + c) - (a - b + d) + (a - c + d) - (b - c + d)$;
в) $(x + y + z - 1) - (x - y + z + 1) + (x - y - z + 1) - (x - y - z - 1)$.

678. Не меняя ни одного знака, расставьте скобки так, чтобы выполнялось равенство:
а) $x^2 - 3x + 1 - x^2 - 3x - 1 = 2$;
б) $x^2 - 3x + 1 - x^2 - 3x - 1 = -2$;
в) $x^2 - 3x + 1 - x^2 - 3x - 1 = 0$.

679. Упростите выражения $P + Q$, $P - Q$ и $Q - P$, если:
а) $P = 2x^2 + x - 2$, $\quad Q = 1 + 2x - 2x^2$;
б) $P = 12 - 5a - 10a^2$, $\quad Q = 10 + 4a - 10a^2$.

680. Упростите выражения $P - Q + R$ и $P - (Q + R)$, если
$P = 2m^2 - m - 1$, $\quad Q = m^2 - 2m$, $\quad R = m - 1$.

681. Выпишите пары противоположных выражений и пары равных выражений:
$2x - 3y$, $\quad 2x + 3y$, $\quad 3y - 2x$, $\quad -2x - 3y$, $\quad -(2x - 3y)$, $\quad -(3y - 2x)$.

682. Многочлен $2a^3 - 3a^2 - 4a + 5$ представьте в виде разности двух двучленов всеми возможными способами.

683. Представьте в виде суммы и разности двух каких-либо двучленов трехчлен:
а) $x^2 + 3x - 1$; $\quad$ б) $a^2 - 5a + 2$; $\quad$ в) $m^2 + m - 4$; $\quad$ г) $y^2 - y + 10$.

684. Известно, что $t - u = 18$, $u - s = 13$. Найдите $t - s$ и $s - t$.

685. Выразите $a - c$ и $c - a$ через x и y, если $x = a - b$, $y = b - c$.

686. Представьте в виде суммы двух каких-либо двучленов:
а) $x - y$; $\quad$ б) $x + y$.

687. Докажите, что если $a + b + c = 0$, то
$abc - (a + b - c) - (b + c - a) - (c + a - b) = abc$.

688. Представьте в виде многочлена стандартного вида:
а) сумму двузначного числа $\overline{ab}$ с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке;
б) разность трехзначного числа $\overline{abc}$ и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке;
в) сумму всех трехзначных чисел, которые могут быть записаны цифрами a, b и c так, чтобы каждая из них содержалась в числе только один раз.

689. а) Докажите, что сумма двузначных чисел, записанных одними и теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 11.
б) Докажите, что разность двузначных чисел, записанных одними и теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 9.

7.3 Умножение одночлена на многочлен

Умножим одночлен $3x$ на многочлен $2x^3 + 5$. Для этого составим их произведение и с помощью распределительного свойства раскроем скобки:

$$3x(2x^3 + 5) = 3x \cdot 2x^3 + 3x \cdot 5 = 6x^4 + 15x.$$

В результате мы получили многочлен $6x^4 + 15x$.

Вообще, произведение одночлена и многочлена всегда можно преобразовать в многочлен.

> Чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

■ Пример 1. Представим в виде многочлена произведение
$$-5a^2(3a^3 - a + 4):$$

$$-5a^2(3a^3 - a + 4) = -5a^2 \cdot 3a^3 - 5a^2(-a) - 5a^2 \cdot 4 = -15a^5 + 5a^3 - 20a^2.$$

Запись можно вести короче, не выписывая промежуточные результаты:

$$5a^2(3a^3 - a + 4) = -15a^5 + 5a^3 - 20a^2.$$

■ Пример 2. Упростим выражение $7c - 5c(1 - c)$.

Раскроем скобки, выполнив умножение $-5c$ на $1 - c$, и затем приведем подобные члены (если они окажутся):

$$7c - 5c(1 - c) = 7c - 5c + 5c^2 = 2c + 5c^2.$$

А

690. Раскройте скобки:

а) $c(2a + b)$; г) $3x(4y - z)$; ж) $m(1 - m)$;
б) $2a(3b + 5)$; д) $-z(x - y)$; з) $-x(2x + 5)$;
в) $-c(4c + 1)$; е) $(m - 3n)(-a)$; и) $(-a - 4bc)(-b)$.

691. Выполните умножение:

а) $a(3a^2 + a)$; г) $(6k^2 - a) \cdot (-2k)$; ж) $-5p^2(2p^4 - 3)$;
б) $b(2b^3 - 7)$; д) $4m^3(n - 5m)$; з) $(b - 2ac) \cdot 5ab$;
в) $-p^2(3q - 2p)$; е) $-2y^2(y^3 - 1)$; и) $x^5(-x^3 - x^2)$.

692. Представьте в виде многочлена:

а) $5(a^2 - 2ab + b^2)$; г) $4n^2(1 - 2n^2 - 3n^3)$;
б) $2m(m^2 - 3m + 3)$; д) $2b^2(b - ab + 4a^2)$;
в) $-3(x^2 + xy + y^2)$; е) $-3c^3(4d + 3cd - c^2)$.

693. Иногда удобно вести запись умножения в столбик:

$$\begin{array}{r} -5a^2 \\ \times \quad 3a^3 - \quad a + 4 \\ \hline -15a^5 + 5a^3 - 20a^2 \end{array}$$

Умножьте одночлен на многочлен:

а) $3n^4(n^2 + 2n - 4)$; б) $-2m^3(3m - 2m^2 + m^3)$; в) $5xy^2(2x - x^2y - x^3)$.

Упростите выражение (**694—695**).

694. а) $3n^2 - n(4n - 6m)$; б) $5a + 2a(3a - 2)$; в) $5c^3 - 3c^2(2c - 1)$.

695. а) $a(a + b) - b(a - b)$; г) $4m(m - 2) - (4m^2 - 8)$;
б) $2x(x - y) - y(y - 2x)$; д) $2(x^2 - 7) + (7 - 2x^2)$;
в) $a(a^2 - 1) + a^2(a - 1)$; е) $3x(x - y) + 3y(x + y)$.

696. Составьте выражение по условию задачи и упростите его:

а) Чему равна площадь прямоугольника, одна из сторон которого равна x см, а другая на 3 см больше?

б) Чему равна площадь прямоугольника, одна из сторон которого равна x см, а другая на a см меньше?

697. Составьте выражение по условию задачи и упростите его:

а) Какое расстояние проехал автомобиль, если он ехал 4 ч со скоростью y км/ч, а в следующие 2 ч его скорость была на 10 км/ч больше?

б) Какое расстояние преодолел турист, если 3 ч он ехал на велосипеде со скоростью a км/ч, затем 1,5 ч шел пешком со скоростью, на b км/ч меньшей?

Б

698. Представьте в виде многочлена стандартного вида:

а) $x(2x^2 - 3x + 1) + 2x(3 + 2x - x^2)$;
б) $m(m^2 - mn + n^2) - n(m^2 + mn + n^2)$;
в) $2p(1 - p - 3p^2) - 3p(2 - p - 2p^2)$;
г) $2c(5a - 3c^2) - c(a - 6c^2) + 3a(a - c)$.

699. Упростите выражение:

а) $(m(3m - 2n) - m(3n - 2m))n$;

б) $b(a(a - b) - b(a + b)) - a(b(a - b) - a(a + b))$.

700. Составьте выражение по условию задачи и упростите его:

а) Катер плыл по течению реки 3 ч и против течения 4 ч. Какое расстояние прошел катер за это время, если собственная скорость катера x км/ч, а скорость течения реки m км/ч?

б) Лодка отплыла от пристани и плыла по течению реки 2 ч, затем она повернула и плыла еще 2 ч против течения. Сколько километров она не доплыла до пристани, если ее собственная скорость равна v км/ч, а скорость течения реки a км/ч? Зависит ли ответ этой задачи от собственной скорости лодки?

701. Докажите, что:

а) $a(b - c + d) - b(c - d + a) + c(a + b - d) - d(a + b - c) = 0$;

б) $xyz(x - 1) - xyz(y - 1) - xyz(z - 1) - xyz = xyz(x - y - z)$.

702. Докажите, что:

а) если $a + b + c = 0$, то

$$a(bc - 1) + b(ac - 1) + c(ab - 1) = 3abc;$$

б) если $ab + ac + bc = 0$, то

$$a(a - b) + b(b - c) + c(c - a) = a^2 + b^2 + c^2.$$

703. Докажите, что если $a^2 = b^2 + c^2$, то

$$(bc - a)a - (ac - b)b - (ab - c)c = -abc.$$

704. Докажите, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то:

а) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; б) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$; в) $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$.

Проиллюстрируйте доказанное утверждение примером.

705. Упростите выражение:

а) $c(3c^2 - 5c - 1) - 4c(3c^2 - 5c - 2) + 3c(3c^2 - 5c + 1)$.

У к а з а н и е. Можно упростить преобразования, если ввести замену $3c^2 - 5c = x$:

$$c(x - 1) - 4c(x - 2) + 3c(x + 1) = \dots;$$

б) $2m(3 - m + 5m^2) + 3m(1 - m + 5m^2) - 5m(5m^2 - m)$;

в) $3a(a^2 + 3a + 2) - 4a(a^2 + 3a - 2) + 2a(a^2 + 3a - 1)$.

7.4 Умножение многочлена на многочлен

Рассмотрим, как можно умножить многочлен на многочлен на примере произведения

$$(a + b)(c + d).$$

Обозначим двучлен $a + b$ какой-либо одной буквой, например буквой x, и раскроем скобки в произведении $x(c + d)$ по правилу умножения одночлена на многочлен. Затем букву x заменим двучленом $a + b$ и опять раскроем скобки. Получим

$$\underbrace{(a + b)}_{x}(c + d) = x(c + d) = xc + xd = (a + b)c + (a + b)d =$$

$$= ac + bc + ad + bd.$$

Таким образом,

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

С помощью рисунка 7.1 полученное равенство для положительных a, b, c и d можно доказать геометрически: площадь прямоугольника со сторонами $a + b$ и $c + d$ равна сумме площадей четырех прямоугольников, стороны которых равны a и c, b и c, a и d, b и d. Интересно, что именно так, используя правила вычисления площадей, получали подобные равенства ученые Древней Греции. Величины они изображали отрезками, произведение ab называли прямоугольником, выражение a^2 — квадратом. Такая алгебра, оперировавшая не числами, а отрезками, площадями, объемами, т. е. выраженная геометрическим языком, много веков спустя была названа *геометрической алгеброй.*

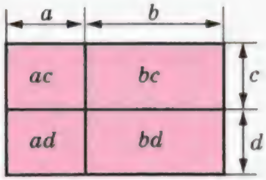


Рис. 7.1

Умножив многочлен $a + b$ на многочлен $c + d$, мы получили многочлен $ac + bc + ad + bd$.

Вообще, произведение двух многочленов всегда можно представить в виде многочлена.

> Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого и полученные произведения сложить.

■ **Пример.** Умножим многочлен $a - b + c$ на многочлен $a + b - c$:

$$(a - b + c)(a + b - c) =$$

$$= a^2 - \underline{ab} + \underline{\underline{ac}} + \underline{ab} - b^2 + \underline{\underline{\underline{bc}}} - \underline{\underline{ac}} + \underline{\underline{\underline{bc}}} - c^2 =$$

$$= a^2 - b^2 - c^2 + 2bc.$$

А

706. Представьте произведение в виде многочлена:

а) $(x + 3)(x + 1)$; в) $(a - 4)(a + 3)$; д) $(m - 11)(m - 2)$;
б) $(c + 8)(c + 2)$; г) $(b + 5)(b - 2)$; е) $(y - 5)(y + 6)$.

Выполните умножение (**707—708**).

707. а) $(2m + 1)(2m + 5)$; д) $(y - 4)(3y - 4)$;
б) $(3x + 2)(x + 3)$; е) $(6a - 5)(6a - 1)$;
в) $(5m - 1)(m + 1)$; ж) $(2b + 3)(3b - 2)$;
г) $(4n + 7)(2n - 3)$; з) $(7z - 2)(z - 3)$.

708. а) $(2x - y)(x + y)$; д) $(5x - c)(x - 5c)$;
б) $(a + b)(2a + 3b)$; е) $(4m + 3n)(4m + 3n)$;
в) $(3c + a)(2c - a)$; ж) $(3y - 2v)(3y + 2v)$;
г) $(6z - y)(2z - y)$; з) $(10x + 3z)(10x - 5z)$.

709. Запишите степень двучлена в виде произведения и выполните умножение:

а) $(x + y)^2$; б) $(a - c)^2$; в) $(m + 2)^2$; г) $(1 - k)^2$.

710. Преобразуйте в многочлен:

а) $(x^2 + 1)(x^2 + 2)$; г) $(2y^2 - 3)(y^2 + 2)$; ж) $(a + 2n^2)(a^2 + n)$;
б) $(a^2 - 1)(a^3 - 1)$; д) $(a^2 - b^2)(a - b)$; з) $(x^2 - a)(x^2 + a)$;
в) $(3 + b^3)(b^3 - 4)$; е) $(m^2 + 3n)(m^2 - n)$; и) $(3 + c^3)(5 - c^2)$.

711. Иногда удобно умножать многочлены в столбик, подписывая многочлены один под другим и умножая по очереди слева направо каждый член первого многочлена на второй многочлен:

$$\begin{array}{rl}
 & 2a + 3 \\
\times & 5a - 1 \\
\hline
 & 10a^2 - 2a \qquad \text{— умножили } 2a \text{ на } 5a - 1. \\
 & 15a - 3 \text{ — умножили } 3 \text{ на } 5a - 1. \\
\hline
 & 10a^2 + 13a - 3
\end{array}$$

Выполните таким образом умножение:

а) $(2m^2 - 5)(m^2 - 2)$; б) $(y + 1)(y^2 + 4y - 3)$.

712. С помощью рисунка 7.2 докажите равенство $(a + b + c)(d + e) = ad + bd + cd + ae + be + ce$. Докажите это равенство с помощью преобразований.

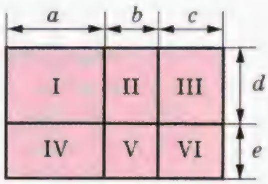


Рис. 7.2

713. Представьте в виде многочлена:

а) $(y - 1)(y^2 + 2y - 1)$;
б) $(z^2 + 3z + 2)(z - 5)$;
в) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
г) $(x^2 - xy + y^2)(x - y)$.

Упростите выражение (714—715).

714. а) $(7 - 2x - x^2) - (x - 2)(x + 3)$;

б) $(3m^2 + 3n^2) - (2m + n)(m + 2n)$;

в) $(z + 2)(z + 3) - z(z + 1)$;

г) $(c - 5)(c - 10) + 3c(c + 5)$;

д) $u(u + v) - (v - 1)(u - 1)$.

715. а) $(n + 1)(2n - 3) + (n - 1)(3n + 1)$;

б) $(x - y)(2x - 3y) - (3x - y)(2x + y)$;

в) $(2a + 3)(2a + 3) - (2a + 1)(2a - 1)$;

г) $(3c - d)(d + 3c) + (4c - d)(c - 4d)$.

Б

716. Составьте два выражения для вычисления площади прямоугольника (рис. 7.3) и запишите соответствующее равенство. Докажите это равенство алгебраически.

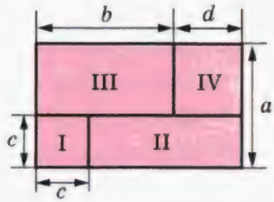


Рис. 7.3

717. Выполните умножение:

а) $(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 1)$;

б) $(2t - v + s)(t + 2v - s)$;

в) $(y^2 - 3y - 2)\ (y^2 + 3y - 2)$;

г) $(a + 2b + 3c)(2a - b + 2c)$.

718. Представьте в виде многочлена:

а) $(x - 1)(x - 3)(x - 5)$;

б) $x(x - 1)(x - 2) - x^2(x - 3)$;

в) $(y - 1)(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1)$;

г) $(n + 1)(n^4 - n^3 + n^2 - n + 1)$.

719. Докажите, что:

а) $(a + b)(a + b + 2c) = (a + b)(a + b + c) + ac + bc$;

б) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$.

720. Докажите, что если $ac + bc + ac = 0$, то

$(a - b)(a - c) + (b - c)(b - a) + (c - a)(c - b) = a^2 + b^2 + c^2$.

721. Упростите выражение:

а) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 5) - (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x - 3)$.

Указание. Введите замену $x^2 - 3x = y$.

б) $(n - 1)(n - 6)(n^2 - 7n - 3) - (n - 3)(n - 4)(n^2 - 7n + 1)$.

722. Дано выражение $(4m - 2n)(m - n)$. Укажите выражения, противоположные данному; равные данному:

$(2n - 4m)(m - n)$; $\quad -(2n - 4m)(m - n)$;

$(2n - 4m)(n - m)$; $\quad (4m - 2n)(n - m)$;

$(4m + 2n)(m + n)$; $\quad (4m - 2n)(m + n)$;

$-(4m - 2n)(m - n)$; $\quad -(4m - 2n)(n - m)$.

723. Выпишите выражения, равные произведению

$$(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5):$$

$$(1-n)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5);$$
$$(n-1)(2-n)(n-3)(4-n)(n-5);$$
$$(1-n)(2-n)(3-n)(4-n)(5-n);$$
$$(1-n)(2-n)(n-3)(4-n)(5-n).$$

724. Представьте каждое произведение в виде многочлена:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4);$$
$$(x-1)(x-2)(x-3)(4-x);$$
$$(1-x)(x-2)(x-3)(4-x);$$
$$-(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

7.5 Формулы квадрата суммы и квадрата разности

При умножении многочленов встречается несколько особых случаев, знание которых очень полезно. Это, в частности, умножение двучлена на самого себя, т. е. возведение двучлена в квадрат. Преобразуем в многочлен выражение $(a+b)^2$:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Таким образом,

$$\mathbf{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}.$$

Мы получили **формулу квадрата суммы**. В словесной формулировке ее обычно читают так:

Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.

Утверждение, которое выражается формулой квадрата суммы, было известно еще в древности. Оно описано, например, древнегреческим ученым Евклидом (III в. до н. э.). Доказательство, приведенное Евклидом, вы можете воспроизвести самостоятельно, воспользовавшись рисунком 7.4.

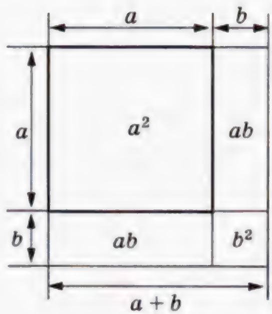


Рис. 7.4

С помощью полученной формулы можно возводить в квадрат сумму любых двух выражений.

■ Пример 1. Преобразуем в многочлен выражение $(2x + 5y)^2$:

$$\underbrace{(2x + 5y)^2}_{(a+b)^2} = \underbrace{(2x)^2}_{a^2} + \underbrace{2 \cdot 2x \cdot 5y}_{2\cdot a\cdot b} + \underbrace{(5y)^2}_{b^2} = 4x^2 + 20xy + 25y^2.$$

Аналогично можно получить **формулу квадрата разности:**

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Значит,

$$\mathbf{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.}$$

Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.

■ Пример 2. Преобразуем в многочлен выражение $(x-0{,}5c)^2$:

$$(\underbrace{x}_{a} - \underbrace{0{,}5c}_{b})^2 = \underbrace{x^2}_{a^2} - \underbrace{2x}_{2\cdot a} \cdot \underbrace{0{,}5c}_{b} + \underbrace{(0{,}5c)^2}_{b^2} = x^2 - xc + 0{,}25c^2.$$

Заметим, что для возведения в квадрат двучлена $x - 0{,}5c$ можно воспользоваться и формулой квадрата суммы. Действительно, двучлен $x - 0{,}5c$ — это сумма x и $-0{,}5c$, поэтому

$$(x-0{,}5c)^2 = x^2 + 2x\cdot(-0{,}5c) + (-0{,}5c)^2 = x^2 - xc + 0{,}25c^2.$$

Таким образом, мы видим, что при возведении в квадрат двучлена получается трехчлен. Доказанные формулы позволяют записать этот трехчлен сразу, не выполняя «длинного» умножения. Поэтому их называют **формулами сокращенного умножения.**

Иногда трехчлен удается «свернуть» в квадрат двучлена.

■ Пример 3. Выясним, можно ли представить в виде квадрата двучлена трехчлен $a^2 - 10a + 25$.

Первый член трехчлена — это a^2, выражение $10a$ — это $2\cdot 5\cdot a$, третий член — это 5^2:

$$a^2 - 10a + 25 = a^2 - 2\cdot 5\cdot a + 5^2.$$

Теперь ясно, что данный трехчлен может быть получен в результате возведения в квадрат двучлена $a - 5$ или двучлена $5 - a$. Таким образом,

$$a^2 - 10a + 25 = (a-5)^2 \text{ или } a^2 - 10a + 25 = (5-a)^2.$$

А

725. Запишите следующие выражения:

а) квадрат суммы x и y;
б) сумму квадратов m и n;
в) квадрат разности m и 3;
г) разность квадратов a и c;
д) куб суммы y и z;
е) квадрат суммы a, b и c;
ж) куб суммы m, n и 1;
з) разность кубов x и z.

726. Запишите выражение в виде трехчлена, пользуясь нужной формулой:

а) $(t + v)^2$; в) $(p + 1)^2$; д) $(c - x)^2$; ж) $(z - 5)^2$;
б) $(m - n)^2$; г) $(y - 2)^2$; е) $(3 + a)^2$; з) $(b + 6)^2$.

727. Представьте квадрат двучлена в виде трехчлена:

а) $(2x - 1)^2$; в) $(4z - 3)^2$; д) $(4 - 2b)^2$; ж) $(1 - 2k)^2$;
б) $(5y + 1)^2$; г) $(3a + 2)^2$; е) $(3 + 6c)^2$; з) $(5 + 3t)^2$.

728. Выполните возведение в квадрат:

а) $(2x + 3y)^2$; в) $(4u - 3t)^2$; д) $(ab + 2)^2$; ж) $(1 - xz)^2$;
б) $(3a - 2b)^2$; г) $\left(2m + \frac{1}{2}n\right)^2$; е) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$; з) $\left(y + \frac{1}{y}\right)^2$.

729. Преобразуйте в многочлен:

а) $(x^2 + 3)^2$; в) $(1 - m^3)^2$; д) $(2y^2 - 3x^2)^2$;
б) $(a^2 - 2)^2$; г) $(5 + c^3)^2$; е) $(x^2y^2 + 1)^2$.

730. Докажите, что:

а) $(a - b)^2 = (b - a)^2$; б) $(x + y)^2 = (-x - y)^2$.

731. Заполните пропуски:

а) $(2x + ...)^2 = ... + ... + y^2$; в) $(... + 2m)^2 = 4n^2 + ... + ...$;
б) $(3y - ...)^2 = ... - 24y + ...$; г) $(... - ...)^2 = a^2 - ... + 9$.

732. Представьте трехчлен в виде квадрата двучлена:

а) $a^2 + 2a + 1$; ж) $81z^2 - 18az + a^2$;
б) $x^2 - 2x + 1$; з) $9n^2 + 12mn + 4m^2$;
в) $y^2 + 10y + 25$; и) $a^2b^2 + 2ab + 1$;
г) $4 - 20c + 25c^2$; к) $x^4 - 2x^2 + 1$;
д) $a^2 - 6ab + 9b^2$; л) $y^6 + 2y^3 + 1$;
е) $4x^2 + 4xy + y^2$; м) $a^4 - 2a^2b + b^2$.

733. Подберите такое k, чтобы трехчлен был равен квадрату двучлена:

а) $a^2 - 2a + k$; в) $m^2 + km + 16$; д) $k - 6n + n^2$;
б) $x^2 + 6x + k$; г) $y^2 + ky + 25$; е) $k + 8ab + b^2$.

734. Упростите выражение:

а) $(x + 4)^2 - 7x$; д) $9m^2 - (n - 3m)^2$;
б) $(c - 1)^2 - (1 - 2c)$; е) $(a^2 + b^2) - (a - b)^2$;
в) $(x - y)^2 + x(y - x)$; ж) $z(5 - z) + (z - 5)^2$;
г) $(a + b)^2 - 2b(a - b)$; з) $3u(u + 2) - (u + 3)^2$.

735. Преобразуйте в многочлен:

а) $2(a-3)^2$; в) $-5(1-2c)^2$; д) $0{,}1(a+5)^2$;

б) $3(x+y)^2$; г) $-4(3m+n)^2$; е) $-\frac{1}{2}(2u-v)^2$.

736. Докажите, что:

а) $(a+b)^2-2ab=a^2+b^2$; в) $a(a+b)+b(a+b)=(a+b)^2$;

б) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$; г) $(a-b)^2=a(a-b)-b(a-b)$.

Б

737. Докажите, что $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$. Поясните это равенство с помощью рисунка 7.5.

738. Проиллюстрируйте с помощью рисунка 7.6 формулу

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

739. Докажите, что $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$. Поясните это равенство с помощью рисунка 7.7.

740. Укажите пары равных выражений, пары противоположных выражений:

а) $(a-b)^2$, $(b-a)^2$, $-(a-b)^2$;

б) $(a-b)^3$, $(b-a)^3$, $-(b-a)^3$;

в) $(a-b)^4$, $(b-a)^4$, $-(b-a)^4$.

741. Выполните действия, используя формулы сокращенного умножения:

а) $(x-3)(3-x)$; в) $(3x+2y)(-3x-2y)$;

б) $(2a^2-b)(b-2a^2)$; г) $(-c^2-2d)(c^2+2d)$.

742. Упростите выражение:

а) $(y+2)^2-2(y+1)^2$; в) $(3-5x)^2-(3x-2)(5x+1)$;

б) $4(2-x)^2+5(x-5)^2$; г) $6(a-2)(a-3)-4(a-3)^2$.

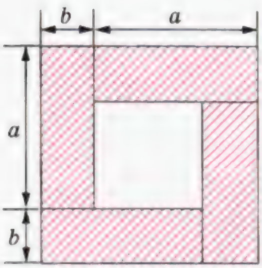


Рис. 7.5

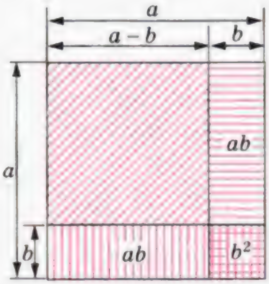


Рис. 7.6

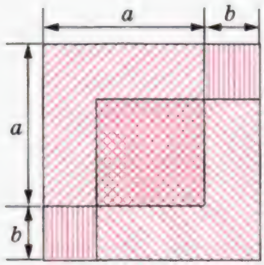


Рис. 7.7

743. Докажите, что:

а) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$;

б) $(p^2 + q^2)^2 = (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2$;

в) $\dfrac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab} = 4$;

г) $-\dfrac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{4} = ab$.

744. Упростите выражение:

а) $(m^2 + n - 4)^2 - (m^2 + n - 1)(m^2 + n - 8)$;

б) $(2x^2 + x - 5)^2 - (2x^2 + x)(2x^2 + x - 1) + 9(2x^2 + x)$.

Указание. Введите удобную замену.

745. Выведите формулу куба суммы

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Пользуясь этой формулой, преобразуйте выражение:

а) $(x + y)^3$; б) $(x + 2y)^3$.

746. Выведите формулу куба разности

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

С помощью этой формулы представьте в виде многочлена:

а) $(x - y)^3$; б) $(3x - y)^3$.

747. Пользуясь формулами квадрата суммы и квадрата разности, представьте в виде многочлена выражение:

а) $(a + b)^4$; б) $(a - b)^4$.

748. Докажите, что если к произведению двух последовательных натуральных чисел прибавить большее из них, то получится квадрат большего числа.

749. Представьте в виде квадрата двучлена:

а) $(2a + 3b)^2 - 8b(2a + b)$; б) $(3x - 2y)^2 + 5x(4y - x)$.

750. Докажите равенство:

а) $(a - 1)^2 + 2(a - 1) + 1 = a^2$;

б) $(1 - a)^2 + 2a(1 - a) + a^2 = 1$;

в) $(x + 1)^2 - 4(x + 1) + 4 = (x - 1)^2$;

г) $(x + y)^2 - 2(x + y)(x - y) + (x - y)^2 = 4y^2$.

Выделите квадрат двучлена (751—752).

751. а) $a^2 + 6a - 10$; г) $x^2 + 3x - 0{,}25$;

б) $x^2 - 4x + 1$; д) $a^2 - \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}$;

в) $c^2 + 10c$; е) $b^2 + b + 1$.

Образец. $x^2 - 8x + 9 = x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 16 - 16 + 9 = (x - 4)^2 - 7$.

752. а) $a^2 + 3ab + b^2$; в) $m^2 - mn + n^2$;
б) $x^2 + xy + y^2$; г) $4a^2 + 5ac + c^2$.

753. Дополните равенство:
а) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 ...$; б) $x^2 + y^2 = (x - y)^2 ...$.

754. Найдите значение выражения $x^2 + \frac{1}{x^2}$, если:
а) $x + \frac{1}{x} = 2{,}5$; б) $x - \frac{1}{x} = 2$.

755. (*Задача-исследование.*)
1) Используя формулу квадрата двучлена, возведите в квадрат трехчлен $a + b + c$. (Указание. Введите замену $a + b = x$.) Проиллюстрируйте полученное равенство геометрически, изобразив квадрат со стороной $a + b + c$.
2) С помощью полученной формулы возведите в квадрат:
$$a - b + c; \quad a - b - c.$$
3) По аналогии с формулой, полученной в п. 1, запишите формулу для преобразования в многочлен выражения $(a + b + c + d)^2$. Проверьте с помощью умножения, верно ли записанное равенство.
4) Пользуясь выведенной формулой, возведите в квадрат
$$a + b - c + d.$$

7.6 Решение задач с помощью уравнений

При составлении уравнений по условию задачи часто используют рисунки, схемы, которые помогают проанализировать условие задачи, организовать ее данные.

■ Пример 1. Два туриста вышли одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 22,5 км, и встретились через 3 ч. С какой скоростью шел каждый из них, если известно, что скорость одного на 1,5 км/ч больше скорости другого?

Если x км/ч — это скорость, с которой шел первый турист, то скорость второго туриста $x + 1{,}5$ км/ч.

Сделаем рисунок, который поможет нам составить уравнение (рис. 7.8).

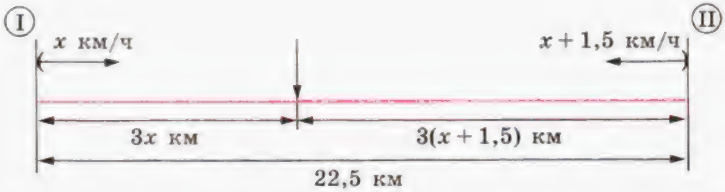


Рис. 7.8

Первый турист прошел до встречи $3x$ км, а второй $3(x + 1{,}5)$ км. В сумме эти расстояния составляют 22,5 км:

$$3x + 3(x + 1{,}5) = 22{,}5.$$

Решим это уравнение:

$$x + (x + 1{,}5) = 7{,}5,$$
$$2x = 6,$$
$$x = 3.$$

Первый турист шел со скоростью 3 км/ч, а второй — со скоростью $3 + 1{,}5 = 4{,}5$ км/ч.

Ответ. 3 км/ч, 4,5 км/ч.

■ Пример 2. Виктор выходит из дома и идет в школу со скоростью 60 м/мин. Через 8 мин вслед за ним из этого же дома выходит Иван и идет той же дорогой со скоростью 100 м/мин. В школу они приходят одновременно. Чему равно расстояние от дома до школы?

Обозначим расстояние до школы (в м) буквой x. Тогда Виктор идет до школы $\frac{x}{60}$ мин, а Иван — $\frac{x}{100}$ мин.

Уравнение нетрудно составить, если понять, что условие задачи можно сформулировать иначе: «Виктор шел в школу на 8 мин дольше, чем Иван». Поэтому

$$\frac{x}{60} - \frac{x}{100} = 8.$$

Решим это уравнение:

$$\frac{x}{60} \cdot 300 - \frac{x}{100} \cdot 300 = 8 \cdot 300,$$
$$5x - 3x = 2400,$$
$$2x = 2400,$$
$$x = 1200.$$

Ответ. 1200 м.

Если буквой x обозначить время движения Виктора (в мин), то получится более простое уравнение:

$$\underbrace{\text{Расстояние, которое прошел Виктор}}_{60x} = \underbrace{\text{Расстояние, которое прошел Иван}}_{100(x-8)}$$

Решите это уравнение. Не забудьте, что, используя найденное значение x, надо еще найти расстояние от дома до школы.

■ Пример 3. Имеется прямоугольный кусок стекла, одна из сторон которого на 30 см больше другой. Чтобы вставить его в оконную раму, его длину и ширину пришлось уменьшить на 10 см. Площадь обрезков составила 1400 см^2. Чему были равны первоначальные размеры стекла?

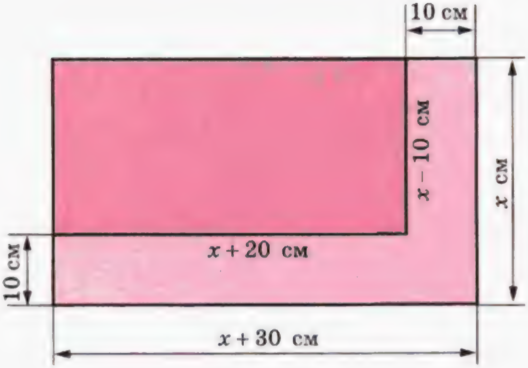


Рис. 7.9

Пусть x см — длина меньшей стороны куска стекла, тогда $x + 30$ см — длина другой его стороны.

Сделаем рисунок (рис. 7.9) и составим уравнение:

$$\underbrace{\text{Первоначальная площадь куска стекла}}_{x(x+30)} - \underbrace{\text{Площадь уменьшенного куска стекла}}_{(x-10)(x+20)} = \underbrace{\text{Площадь обрезков}}_{1400}$$

Решим уравнение:

$$x(x + 30) - (x - 10)(x + 20) = 1400,$$
$$x^2 + 30x - (x^2 + 20x - 10x - 200) = 1400,$$
$$x^2 + 30x - x^2 - 20x + 10x + 200 = 1400,$$
$$20x + 200 = 1400,$$
$$20x = 1200,$$
$$x = 60, \quad x + 30 = 90.$$

Ответ. 60 см, 90 см.

A

Решите уравнение (**756—759**).

756. а) $-7x + 5(2x - 3) = 6$; б) $5x - 7(3 - x) = 2x + 11$; в) $0{,}3 - 2(x + 1) = 0{,}4x + 0{,}1$; г) $6x - 3{,}2 = 7x - 3(2x - 2{,}5)$.

757. а) $2(x + 5) - 3(x - 2) = 10$; б) $2(5 - x) - 5(2x - 3) = 1$; в) $5(x - 1) + 5(3x + 2) = 6x + 8$; г) $44 - 10(3 - 4x) = 7(5x + 2)$.

758. а) $(x - 2)(x - 3) = x(x + 1)$; б) $(x + 4)(x + 6) - x^2 = 30$; в) $(x - 5)(x + 1) - x = x^2 + 5$; г) $(x - 1)(x - 3) = (x - 2)(x - 4)$.

759. а) $(x + 3)^2 - x^2 = 33$; в) $(x + 12)^2 = x(x + 8)$;
б) $x^2 - (x - 5)^2 = 10$; г) $(x - 3)(x + 1) = (x - 2)^2$.

Решите задачу (чтобы легче было составить уравнение, сделайте рисунок, **760—770**).

760. а) Турист вышел из пункта A по направлению к пункту B, расстояние до которого равно 9 км. Одновременно с ним из B в A выехал велосипедист, скорость которого на 10 км/ч больше скорости туриста. Через 0,5 ч они встретились. Определите скорость, с которой шел турист.

б) Два мальчика выбегают одновременно навстречу друг другу из двух точек, расстояние между которыми 660 м, и встречаются через 2 мин. Один из них пробегает на 30 м в минуту меньше, чем другой. Сколько метров в минуту пробегает каждый из них?

761. (*Задание с выбором ответа.*) Автомобиль и автобус, находящиеся на расстоянии 30 км друг от друга, одновременно начали движение навстречу друг другу. Они встретились через 12 мин. Скорость автомобиля в полтора раза больше скорости автобуса. Чему равна скорость автобуса?
Укажите уравнение, которое является правильным переводом условия задачи на математический язык, если обозначить через x км/ч скорость автобуса.

А. $\frac{1}{5}(1{,}5x - x) = 30$. **В.** $x + 1{,}5x \cdot \frac{1}{5} = 30$.

Б. $\frac{1}{5}(1{,}5 + x) + \frac{1}{5}x = 30$. **Г.** $\frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \cdot 1{,}5x = 30$.

762. а) Расстояние между двумя железнодорожными станциями A и B равно 300 км. От станции A по направлению к B вышел пассажирский поезд. Одновременно навстречу ему из B вышел электропоезд, скорость которого на 30 км/ч меньше скорости поезда. Они встретились через 2 ч на разъезде. На каком расстоянии от A и от B находится разъезд?
Указание. Задачу легче решить, если обозначить буквой какую-нибудь из скоростей.

б) Расстояние между домами Андрея и Бориса, расположенными на одном шоссе, 2 км. Они выходят одновременно из своих домов навстречу друг другу и встречаются через 0,2 ч. Скорость Андрея на 1 км/ч больше скорости Бориса. На каком расстоянии от дома Бориса произошла встреча?

763. а) Два поезда, встретившись на разъезде, продолжали движение каждый в своем направлении. Скорость одного из них на 20 км/ч больше скорости другого. Через 3 ч расстояние между ними было 480 км. Найдите скорость каждого поезда.

б) Два автомобиля едут по шоссе навстречу друг другу. Скорость одного из них на 10 км/ч меньше скорости другого. Через 2 ч после того, как они встретились, расстояние между ними стало равным 260 км. Найдите скорость каждого автомобиля.

764. а) От станции к озеру вышел пешеход со скоростью 4 км/ч. Через 0,5 ч вслед за ним от этой же станции и по той же дороге отправился велосипедист со скоростью 12 км/ч. К озеру они прибыли одновременно. Определите, сколько времени шел пешеход и чему равно расстояние от станции до озера.

б) Из города Новое в город Молодежный в 9 ч утра выезжают автобус и легковой автомобиль. Скорость автомобиля на 20 км/ч больше скорости автобуса. Автомобиль приезжает в город Молодежный в 15 ч, а автобус — в 17 ч этого же дня. Определите скорость, с которой ехал автобус, и расстояние между городами.

765. а) Катер по течению реки прошел за 3,5 ч такое же расстояние, какое он проходит за 4 ч против течения реки. Собственная скорость катера 30 км/ч. Определите скорость течения реки. Какое расстояние прошел катер по течению реки?

б) Теплоход прошел расстояние между пристанями по течению реки за 4 ч, а против течения реки за 5 ч. Определите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки 2 км/ч. Каково расстояние между пристанями?

766. а) Лодка проплыла некоторое расстояние от пристани по течению реки и вернулась обратно, затратив на весь путь 8 ч. Собственная скорость лодки 8 км/ч, а скорость течения реки 2 км/ч. Определите, сколько времени плыла лодка по течению реки и все расстояние, которое она проплыла.

б) Пловец плыл 10 мин по течению реки и 15 мин против течения и проплыл всего 2100 м. Определите собственную скорость пловца (в м/мин), если скорость течения реки 30 м/мин.

767. а) Площадь квадрата равна площади прямоугольника, одна из сторон которого на 1 см меньше стороны квадрата, а другая на 2 см больше стороны квадрата. Найдите длину стороны квадрата и длины сторон прямоугольника.

б) Площадь квадрата на 63 см^2 больше площади прямоугольника. Одна из сторон прямоугольника на 3 см больше, а другая на 6 см меньше стороны квадрата. Найдите площадь квадрата.

768. а) Пекарня использует для выпечки тортов формы двух видов, имеющие одинаковую площадь дна. У одной из них дно квадратное, а у другой — прямоугольное. Длина прямоугольной формы на 8 см больше, а ширина на 6 см меньше, чем сторона квадратной формы. Найдите размеры дна каждой формы.

б) Под строительство был отведен участок земли, имеющий форму квадрата. Площадь этого участка пришлось увеличить на 830 м^2. Для этого одну из сторон первоначального участка увеличили на 4 м, а другую — на 5 м и получили новый участок прямоугольной формы. Чему была равна площадь первоначального участка?

769. а) Через 3 дня после того, как Петр начал читать книгу, эту же книгу начал читать Алексей. Закончили чтение они одновременно. Петр прочитывал по 10 страниц в день, а Алексей — по 16 страниц в день. Сколько страниц в книге?

б) Две машинистки получили для перепечатки одинаковое число страниц рукописи. Через 4 дня после того, как первая начала работу, к работе приступила вторая. Закончили они работу одновременно. Первая машинистка печатала по 24 страницы в день, а вторая — по 40 страниц. Сколько дней работала каждая машинистка и сколько страниц они напечатали вместе?

770. а) Щенку 37 дней, а котенку 7 дней. Через сколько дней щенок станет в 3 раза старше котенка?

б) Два года назад брат был младше сестры в 3 раза, а сейчас он младше сестры в 2 раза. Сколько сейчас лет брату и сколько сестре?

Б

Решите уравнение (**771—772**).

771. а) $\frac{1}{3}(x+1) - \frac{2}{3}(x-1) = \frac{2}{3}(x-3)$;

б) $\frac{1}{2}(3x+7) - \frac{3}{4}(2x-2) = \frac{3}{4}(x+1)$;

в) $x(x-3) + x(2x-1) = 3x(x-2) - 3$;

г) $3 + 2x(3x-4) = 4x(2x+5) - 2x(x-1)$;

д) $x(x+1)(x-10) = (x-1)(x-3)(x-5)$;

е) $(x-1)(x-4)(x+7) = x(x+1)^2$.

772. а) $5\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+7\right)+12=7\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+7\right)-4$.

Указание. Сделайте замену $\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+7=y$ и, выполнив соответствующую подстановку, решите уравнение;

б) $1-2\left(\frac{x}{5}-\frac{x}{3}-5\right)=14+\left(\frac{x}{5}-\frac{x}{3}-6\right)$;

в) $7(2(5x+1)-3)-15=4(2(5x+1)-3)$;

г) $4(3(2x-1)+7)-4=3(3(2x-1)+6)$.

Решите задачу **(773—785)**.

773. Расстояние между городами A и B равно 244 км. Из A в B выехал автобус, а через 36 мин ему навстречу из B в A выехал автомобиль со скоростью, большей скорости автобуса на 30 км/ч. Через 2 ч после своего выезда автомобиль встретил автобус. Найдите скорость автомобиля.

774. Расстояние между городами A и B равно 240 км. Из города A в город B выехал автомобиль со скоростью 60 км/ч, а через 30 мин навстречу ему из города B выехал мотоциклист со скоростью, меньшей скорости автомобиля на 20 км/ч. Через какое время после выезда мотоциклиста автомобиль и мотоцикл будут на расстоянии 20 км друг от друга?
Указание. Обратите внимание на то, что задача имеет два решения.

775. От автовокзала по шоссе выехал автобус со скоростью 45 км/ч. Через 20 мин вслед за ним выехал автомобиль со скоростью 60 км/ч. Через какое время после выезда автомобиля расстояние между ними будет равно 10 км?

776. Мотоцикл, движущийся по шоссе со скоростью 40 км/ч, миновал бензоколонку. Через час мимо той же бензоколонки проехал автомобиль со скоростью 90 км/ч. На каком расстоянии от бензоколонки автомобиль догнал мотоциклиста?

777. Если автомобиль будет ехать со скоростью 60 км/ч, он приедет из A в B в назначенное время. Проехав полпути со скоростью 60 км/ч, автомобиль увеличил скорость на 20 км/ч и приехал в B на четверть часа раньше назначенного времени. Определите, за какое время автомобиль должен был доехать от A до B.

778. Автобус обычно проходит свой маршрут от начальной до конечной остановки за 54 мин. Однако во время часа пик его скорость была на 10 км/ч меньше, и через 45 мин ему еще оставалось проехать 12 км. Какова обычная скорость автобуса?

779. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 4 км, одновременно выходит пешеход и выезжает велосипедист. Велосипедист доезжает до B, сразу поворачивает обратно и встречает пешехода через 24 мин после своего выезда из A. Определите скорость пешехода и велосипедиста, если известно, что велосипедист проезжает в час на 10 км больше, чем проходит пешеход.

780. Прогулочный речной катер на маршрут к базе отдыха и обратно затрачивает 2 ч 40 мин. На каком расстоянии от начала маршрута находится база отдыха, если собственная скорость катера 35 км/ч, скорость течения реки 5 км/ч и возле базы отдыха катер делает остановку на полтора часа?

781. Вниз по течению реки мимо пристани проплыл плот. Через 10 мин от этой пристани отошел катер в том же направлении. Собственная скорость катера 35 км/ч, скорость течения реки 5 км/ч. Катер обогнал плот и причалил к следующей пристани, а через 11 мин мимо нее проплыл плот. Чему равно расстояние между пристанями?

782. Картинку квадратной формы наклеили на белую бумагу, в результате получилась белая окантовка вокруг всей картинки шириной 5 см. После этого она стала занимать в альбоме площадь на 460 $см^2$ больше, чем она занимала без окантовки. Найдите размеры и площадь картинки.

783. У Наташи есть аквариум с прямоугольным дном, одна сторона которого на 16 см больше другой. Она заменила его большим аквариумом, длина и ширина дна которого на 4 см больше. Она заметила, что если заполнить этот аквариум водой на высоту 30 см, то потребуется на 6 л больше воды, чем требовалось для старого аквариума при заполнении его на такую же высоту. Найдите размеры дна нового аквариума.

784. Друзья Томаса Эдисона удивлялись, почему калитка перед его домом открывается с трудом. «Калитка отрегулирована так, как надо, — смеясь, ответил Эдисон, — я сделал от нее привод к цистерне, и каждый входящий накачивает в цистерну 20 л воды». Если бы каждый посетитель накачивал в цистерну на 5 л воды больше, то для заполнения цистерны понадобилось бы на 12 человек меньше. Сколько воды вмещала цистерна?

785. (*Старинная задача.*) По контракту работникам причитается по 48 франков за каждый отработанный день, а за каждый неотработанный день с них взыскивается по 12 франков. Через 30 дней выяснилось, что работникам ничего не причитается. Сколько дней они отработали за этот период?

7.7 Деление с остатком

(Для тех, кому интересно)

Поговорим еще раз о делимости натуральных чисел.

Если число a делится на число b, то это значит, что существует такое натуральное число q, что $a = bq$. Однако чаще всего одно натуральное число на другое не делится и в результате деления получается остаток.

Разделим, например, 3587 на 24:

$$\begin{array}{r|l} -3587 & 24 \\ \underline{24} & 149 \\ -118 & \\ \underline{96} & \\ -227 & \\ \underline{216} & \\ 11 & \end{array}$$

Получим неполное частное, равное 149, и остаток, равный 11. Поэтому число 3587 можно записать в виде суммы:

$$3587 = 24 \cdot 149 + 11.$$

Точно так же обстоит дело и для любых натуральных чисел. А именно, если при делении числа a на число b получается неполное частное q и остаток r, то $a = bq + r$; при этом число r (как остаток от деления на b) обязательно меньше b.

Если a делится на b без остатка, то можно записать, что $a = bq + 0$. Поэтому в таком случае удобно считать, что получается нулевой остаток.

Заметим, что даже в том случае, когда $a < b$, можно говорить о делении a на b с остатком. Пусть $a = 2$, $b = 5$; тогда можно считать, что неполное частное равно 0, а остаток равен 2, т. е. $2 = 5 \cdot 0 + 2$.

Другими словами, если есть два натуральных числа a и b, то можно записать равенство

$$a = bq + r,$$

где r либо натуральное число, меньшее b, либо равно 0.

Это позволяет разбивать множество целых неотрицательных чисел на классы по остаткам от деления на заданное число. Количество таких классов равно количеству возможных остатков.

Например, при делении на 3 получаются остатки 0, 1 и 2. Поэтому множество целых неотрицательных чисел делится на три класса: числа вида $3n$, числа вида $3n + 1$, числа вида $3n + 2$, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

786. На какие классы разбивается множество неотрицательных целых чисел по остаткам от деления на 2? на 5? на 8? Приведите пример числа каждого вида.

787. Докажите, что:
а) сумма четного и нечетного чисел есть число нечетное;
б) сумма двух нечетных чисел есть число четное;
в) сумма двух последовательных натуральных чисел есть число нечетное;
г) произведение двух последовательных натуральных чисел есть число четное.

788. Найдите остаток от деления на 10 суммы чисел a, b и c, если известно, что:
а) при делении на 10 число a дает в остатке 1, число b дает в остатке 3 и число c дает в остатке 5;
б) при делении на 10 число a дает в остатке 3, число b дает в остатке 5 и число c дает в остатке 7.

789. а) Числа a и b при делении на 7 дают в остатке соответственно 3 и 4. Докажите, что $a + b$ делится на 7.
б) Числа a и b при делении на 6 дают в остатке соответственно 1 и 3. Докажите, что их сумма есть число четное.

790. Докажите, что если числа a и b при делении на число c дают один и тот же остаток, то их разность делится на c.

791. Каждое из чисел a и b при делении на 3 дает в остатке 1. Докажите, что их произведение при делении на 3 также дает в остатке 1.

792. Докажите, что если числа a и b не делятся на 3, то либо их сумма, либо их разность делится на 3.

793. Какой вид имеют числа, о которых известно, что они не делятся ни на 2, ни на 3?

794. а) Докажите, что если число не делится на 5, то на 5 делится его квадрат, увеличенный или уменьшенный на 1.
б) Докажите, что квадрат любого нечетного числа при делении на 8 дает в остатке 1.

795. Найдите все натуральные числа, которые:
а) при делении на 5 дают в остатке 4, а при делении на 2 дают в остатке 1;
б) при делении на 5 дают в остатке 3 и делятся на 2.

ДЗ Дополнительные задания к главе 7

Действия с многочленами

796. Докажите, что:
а) $(c+1)(c-3)+(c-1)(c+3)+6=2c^2$;
б) $(a^2-2)(a+1)-(a^2+1)(a-2)+3a=3a^2$;
в) $(y+1)(y+2)(y-3)-y(y^2-7)+6=0$;
г) $b(b-1)(b+2)+b(b+1)(b-2)-2b(b^2-2)=0$.

797. Найдите значение выражения:
а) $(2x-c)(x+c)-(2c+x)(x-c)+x(2-x)$ при: $c=0{,}7$, $x=-1$; $c=-0{,}2$, $x=-0{,}5$;
б) $(2x^2+x+1)(x-2)+2x^2(2-x)-(x^2-1)$ при: $x=0{,}3$; $x=-0{,}2$;
в) $(a^2-2a+3)(a-3)-9(a-1)+a(5a+6)$ при: $a=-\frac{1}{2}$; $a=\frac{1}{3}$.

798. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел делится на 5.

799. Найдите значение выражения:
а) $(x+1)^2(x+2)-(x-1)^2(x-2)$ при: $x=\frac{1}{4}$; $x=-\frac{1}{6}$;
б) $(1+y)(2-y)^2-(2+y)(1-y)^2-3(1-y^2)$ при: $y=-1{,}4$; $y=2{,}5$.

800. Упростите выражение:
а) $(2n+3)(n+1)+(4n-1)(n-1)+2$;
б) $(2n^2-1)(n+1)-(n^2+1)(2n-1)$;
в) $((b+c)^2-(b^2+c^2))^3-(3bc)^3$;
г) $((m-n)^2+2mn)^3-3m^2n^2(m^2+n^2)$;
д) $((x-y)^3+3xy(x-y))^2+2x^3y^3$;
е) $((y+z)^3-(y^3+z^3))^2-18y^3z^3$.

Решение уравнений и задач

Решите уравнение (801—802).

801. а) $4(1{,}5x-3)-5{,}5x=10$;
б) $0{,}6x=0{,}3-3(x+2{,}5)$;
в) $3(x-1)=3x-4(8x+1)$;
г) $8(x-8)+2(1-2x)=11$.

802. а) $x(x-1)-x(x-3)=12$; в) $(x-4)^2=x^2-16$;
б) $(x+1)(x+2)-x^2=5x+4$; г) $(x+1)^2=x^2+1$.

Решите задачу (**803—815**).

803. Расстояние, равное 40 км, велосипедист проехал за 3 ч. Первый час он ехал со скоростью, на 2 км/ч меньшей, чем в оставшееся время. Определите первоначальную скорость велосипедиста.

804. Товарный поезд вышел со станции и до первой остановки шел со скоростью 35 км/ч. После остановки он увеличил скорость до 45 км/ч и до следующей остановки находился в пути на 1 ч меньше. Весь путь составил 195 км. Определите, сколько времени шел поезд до первой остановки и на каком расстоянии от станции она произошла.

805. Два спортсмена бегут навстречу друг другу по круговой дорожке, длина которой 1 км. Скорость одного из них 140 м/мин, а другого — 160 м/мин. В некоторый момент времени они встречаются. Через сколько минут они встретятся в следующий раз?

806. Одна швея шила фартуки 3 дня, а другая швея шила такие же фартуки 7 дней. Вместе они сшили 135 фартуков. Сколько фартуков в день шила первая швея, если известно, что вторая швея ежедневно шила на 5 фартуков меньше, чем первая?

807. Первый токарь работал 3 ч, а второй — 4 ч, и вместе они обточили 75 деталей. Сколько деталей обточил каждый токарь в отдельности, если известно, что первый токарь обтачивал в час на 3 детали меньше, чем второй?

808. На двух автоматических линиях было упаковано 650 одинаковых коробок конфет. Первые 2 ч работала одна линия, а затем две линии вместе. Определите время работы каждой линии, если известно, что производительность второй линии 100 коробок в час, а первой — на 30 коробок меньше.

809. Два автомата расфасовали в одинаковые пакеты 460 кг крупы за 6 ч. Первый час работал один автомат, следующие 2 ч работал второй автомат, а оставшееся время работали оба автомата вместе. Определите производительность каждого автомата, если известно, что первый автомат фасует за 1 ч на 20 пакетов меньше, чем второй.

810. Машинистка должна была выполнить набор рукописи на компьютере за 6 дней. Однако она набирала каждый день на 5 страниц больше, и за 2 дня до срока ей оставалось набрать 30 страниц. Сколько страниц в день набирала машинистка?

811. Телевизионный экран имеет прямоугольную форму. Одна из его сторон на 6 см меньше другой. Если меньшую сторону увеличить на 1 см, а большую — на 2 см, то площадь изображения увеличится на 65 см^2. Найдите первоначальные размеры телевизионного экрана.

812. Высота двери на 30 см больше, чем ее удвоенная ширина. Чтобы вставить дверь в дверной проем, ее сделали короче на 10 см и у́же на 5 см. При этом площадь обрезков составила 1900 см^2. Определите первоначальные размеры двери.

813. Если каждую из сторон земельного участка, имеющего форму квадрата, уменьшить на 3 м, то получится участок, площадь которого будет меньше площади исходного участка на 81 м^2. Найдите площадь нового участка.

814. Периметр прямоугольника равен 38 см. Если одну из его сторон увеличить на 5 см, а другую уменьшить на 3 см, то площадь полученного прямоугольника будет больше площади данного прямоугольника на 16 см^2. Найдите стороны данного прямоугольника.

815. В классе число отсутствующих учеников составляет пятую часть от числа присутствующих. После того как из класса вышел один ученик, число отсутствующих стало равно четверти числа присутствующих. Сколько учеников в классе?

Вопросы для повторения к главе 7

1. Приведите пример одночлена стандартного вида. Чему равен его коэффициент?
2. Какое выражение называют многочленом? Приведите пример двучлена; трехчлена.
3. На примере многочлена $5xy^2 - x^2y - 2xy \cdot 3y + 7x^2y$ объясните, как приводят многочлен к стандартному виду.
4. На примере многочленов $3x^2 - 8x + 4$ и $2x^2 + 6x - 3$ покажите, как находят сумму и разность многочленов.
5. Сформулируйте правило умножения одночлена на многочлен и примените его к выражению $2ab(4a - 5b - 1)$.
6. Сформулируйте правило умножения многочлена на многочлен и примените его к выражению $(4x - 3y)(2y + x)$.
7. Напишите формулы квадрата суммы и квадрата разности и докажите их.

Задания для самопроверки к главе 7

(Обязательные результаты обучения)

1. Найдите значение выражения:

а) $1,5x - 2y$ при $x = \frac{1}{3}$, $y = 0,3$;

б) $0,5x^3$ при $x = -2$;

в) $3x^2 - 5x + 4$ при $x = -1$;

г) $-0,4x^3 + 2,5y$ при $x = -5$, $y = -8$.

2. Представьте в виде многочлена:
а) $(6x^2 - 2x) + (5 + 10x - 5x^2)$; б) $(6xy + 8y) - (2xy + 8y - 1)$.

3. Представьте выражение $2ab - b^2 + a^2b - 6b$ в виде суммы и в виде разности двух двучленов.

4. Представьте в виде многочлена произведение $4b^3(2b^2 - 3b - 2)$.

5. Упростите выражение:
а) $3a(a - 2) - 2a(a - 3)$; б) $5b(b - c) + c(2b - c)$.

6. Представьте в виде многочлена:
а) $(2x + 5)(4 + 3x)$; б) $(1 - a)(5a + 6)$; в) $(2x - y)(3y - 4x)$.

7. Упростите выражение:
а) $2a(3a - 5) - (a - 3)(a - 7)$; б) $(c + 3)(5 - c) - 3c(1 - c)$.

8. Представьте в виде многочлена:
а) $(3a + 4)^2$; б) $(2a - 3b)^2$.

9. Упростите выражение:
а) $(a - b)^2 - a(a + 2b)$; б) $4c(c - 2) - (c - 4)^2$.

10. Представьте в виде квадрата двучлена:
а) $4 - 4a + a^2$; б) $9a^2 - 6ab + b^2$.

11. Решите уравнение:
а) $10 - 3(5x - 1,5) = 2,5 - 5x$; б) $2(3x - 4) = 5x - 3(x + 1)$.

12. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 26 км, выехал велосипедист. Одновременно с ним из B в A выехал мотоциклист со скоростью, на 28 км/ч большей скорости велосипедиста. Они встретились через 0,5 ч. Найдите скорость мотоциклиста. На каком расстоянии от пункта A произошла встреча?

13. Площадь прямоугольника равна площади квадрата. Одна из сторон прямоугольника на 2 см меньше стороны квадрата, а другая на 3 см больше стороны квадрата. Найдите площадь квадрата.

Тест к главе 7

1. Найдите значение выражения $6a^2 - 2a - 1$ при $a = -\frac{1}{4}$.

   А. $-1\frac{7}{8}$. **Б.** $-1\frac{1}{8}$. **В.** $-\frac{7}{8}$. **Г.** $-\frac{1}{8}$.

2. Какова степень многочлена $0{,}3x^2 - 2x^4 + 1{,}2$?

   А. 2. **Б.** 3. **В.** 4. **Г.** 6.

3. Какую степень имеет многочлен, равный произведению многочленов $(x^2 + 3)(x^3 + 2x - 1)$?

   А. 2. **Б.** 3. **В.** 5. **Г.** 6.

4. Упростите выражение $2x^2y - xy^2 + x^2y - 3xy^2 + 2xy$.

   А. $3x^2y - 4xy^2 + 2xy$. **Б.** $-xy^2 + 2xy$. **В.** x^2y. **Г.** xy^2.

5. Среди выражений, записанных ниже, найдите выражение, равное многочлену $2x - 3y - z$.

   А. $-(2x - 3y - z)$. **В.** $-(3y - 2x + z)$.
   Б. $-(2x + 3y + z)$. **Г.** $-(3y + 2x - z)$.

6. Среди приведенных ниже выражений найдите выражение, противоположное многочлену $5a - 8b + 1$.

   А. $5a + 8b - 1$. **Б.** $-5a + 8b - 1$. **В.** $-5a + 8b + 1$. **Г.** $-5a - 8b - 1$.

7. Какой многочлен надо записать вместо многоточия, чтобы равенство было верным: $(-m + n - q) + \ldots = 0$?

   А. $m - n + q$. **Б.** $m - n - q$. **В.** $m + n - q$. **Г.** $-m - n + q$.

8. Найдите сумму многочленов $2x^3 - 2x$ и $-x^2 + 2x - 1$.

   Ответ. ___________

9. В выражение $p - q$ подставьте

   $$p = 12ab - 15ac, \quad q = 10ab - 15ac + 2bc;$$

   упростите получившееся выражение.

   А. $2ab - 2ac - 2bc$. **Б.** $2ab - 2ac + 2bc$. **В.** $2ab + 2bc$. **Г.** $2ab - 2bc$.

10. Упростите выражение $5a^2 - 5a(a - 2)$.

    Ответ. ___________

11. Собственная скорость катера v км/ч, скорость течения реки a км/ч. Катер плыл 3 ч по течению реки и 3 ч против течения. Какое из следующих утверждений верно?

    А. За это время он проплыл такое же расстояние, как плот по течению за 6 ч.

    Б. За это время он проплыл такое же расстояние, как за 3 ч в стоячей воде.

    В. За это время он проплыл такое же расстояние, как за 6 ч в стоячей воде.

    Г. По течению он проплыл такое же расстояние, как против течения.

12. Выполните умножение $(2a + 3)(4a - 6)$.

А. $8a^2 - 18$. В. $8a^2 + 18$.

Б. $8a^2 + 24a - 18$. Г. $8a^2 + 24a + 18$.

13. Какое из выражений противоположно произведению $(a - b)(a - c)$?

А. $(b - a)(c - a)$. В. $(b - a)(a - c)$.

Б. $-(a - b)(c - a)$. Г. $-(b - a)(a - c)$.

14. Раскройте скобки в выражении $(2x - 5y)^2$.

А. $4x^2 - 25y^2$. В. $4x^2 - 10xy + 25y^2$.

Б. $2x^2 - 10xy + 5y^2$. Г. $4x^2 - 20xy + 25y^2$.

15. Упростите выражение $3(m - 2)^2 + 12m$.

А. $3m^2 + 12$. В. $9m^2 - 24m + 36$.

Б. $3m^2 - 12$. Г. $3m^2 + 6m + 12$.

16. Даны выражения: I. $(a - 5)^2$. II. $(5 - a)^2$. III. $-(a - 5)^2$. IV. $-(5 - a)^2$. Какие из них равны произведению $(a - 5)(5 - a)$?

А. I и II. Б. I и III. В. II и IV. Г. III и IV.

17. Упростите выражение $(1 + xy)^2 - (1 - xy)^2$.

А. 0. Б. $2xy + 2x^2y^2$. В. $2x^2y^2$. Г. $4xy$.

18. Решите уравнение $2(x - 1) - 7 = 5x - 5$.

А. $-1\frac{1}{3}$. Б. $1\frac{1}{3}$. В. $4\frac{2}{3}$. Г. $-4\frac{2}{3}$.

19. Из палаточного лагеря к станции вышел турист со скоростью 6 км/ч. Через 15 мин вслед за ним выехал велосипедист со скоростью 12 км/ч, обогнал туриста и приехал на станцию на 5 мин раньше его. Чему равно расстояние от лагеря до станции?
Какое из следующих уравнений соответствует условию задачи, если буквой x в нем обозначено время движения туриста в часах?

А. $12x = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)$. В. $12x = 6\left(x - \frac{1}{6}\right)$.

Б. $6x = 12\left(x - \frac{1}{3}\right)$. Г. $6x = 12\left(x + \frac{1}{6}\right)$.

20. Найдите ответ на вопрос задачи, сформулированной в задании 19.

А. $\frac{2}{3}$ км. Б. 4 км. В. $\frac{1}{3}$ км. Г. 2 км.

Разложение многочленов на множители

8.1 Вынесение общего множителя за скобки

В предыдущей главе рассматривалось умножение многочленов. Однако в математике важна и обратная задача — представление многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов, среди которых могут быть и одночлены. Такое преобразование называют **разложением многочлена на множители**.

Существует целый ряд приемов для разложения многочленов на множители. Один из них — **вынесение общего множителя за скобки.** Это преобразование вам уже знакомо. Выполняется оно, как и умножение многочлена на одночлен, на основе распределительного свойства. Однако в случае вынесения за скобки это свойство применяется справа налево:

$$ab + ac = a(b + c).$$

■ П р и м е р 1. Разложим на множители многочлен

$$10xy^2 - 6xy.$$

Каждый член этого многочлена можно представить в виде произведения, в котором один из множителей равен $2xy$. Этот общий множитель вынесем за скобки:

$$10xy^2 - 6xy = 2xy \cdot 5y - 2xy \cdot 3 = 2xy(5y - 3).$$

общий множитель

Разложив многочлен на множители, полезно убедиться, что преобразование выполнено верно. Для этого достаточно выполнить об-

ратное преобразование: например, в данном случае мысленно умножить $2xy$ на $5y - 3$.

Заметим, что для разложения многочлена $10xy^2 - 6xy$ на множители можно было бы вынести за скобки и множитель $-2xy$:

$$10xy^2 - 6xy = \underbrace{(-2xy) \cdot (-5y) - (-2xy)}_{\text{общий множитель}} \cdot (-3) =$$

$$= -2xy(-5y + 3) = -2xy(3 - 5y).$$

Члены этого многочлена имеют и другие общие множители: x, $-x$, y, $-y$, xy и т. д. Но обычно за скобки выносят либо $2xy$, либо $-2xy$. Тогда в скобках остается многочлен, члены которого не содержат общих буквенных множителей, а их коэффициенты не имеют общих натуральных делителей, отличных от 1.

Вынесение общего множителя за скобки приходится выполнять при решении разных задач.

■ Пример 2. Сократим дробь $\frac{ab-bc}{a^2-ac}$.

Разложим числитель и знаменатель данной дроби на множители:

$$\frac{ab-bc}{a^2-ac} = \frac{b(a-c)}{a(a-c)}.$$

Теперь ясно, что дробь можно сократить на разность $a - c$:

$$\frac{b(a-c)}{a(a-c)} = \frac{b}{a}.$$

■ Пример 3. Докажем, что сумма любого натурального числа и его квадрата делится на 2.

Обозначим натуральное число буквой n. Тогда сумма этого числа и его квадрата будет $n^2 + n$. Разложим $n^2 + n$ на множители:

$$n^2 + n = n \cdot n + n \cdot 1 = n(n + 1).$$

Мы представили сумму $n^2 + n$ в виде произведения $n(n + 1)$. Но n и $n + 1$ — это два последовательных натуральных числа и одно из них обязательно является четным, т. е. делится на 2. Значит, и все произведение $n(n+1)$, а вместе с ним и равная ему сумма n^2+n делится на 2.

А

816. Вынесите общий множитель за скобки и вычислите значение выражения:

а) $5 \cdot 47 + 5 \cdot 13$;

б) $127 \cdot 9 - 27 \cdot 9$;

в) $75^2 + 25 \cdot 75$;

г) $1\frac{3}{5} \cdot 7 + 2\frac{2}{5} \cdot 7$;

д) $0{,}8 \cdot 4{,}5 - 0{,}8 \cdot 2{,}5$;

е) $0{,}3 \cdot \frac{5}{6} + 0{,}7 \cdot \frac{5}{6}$.

Вынесите общий множитель за скобки (**817—818**).

817. а) $2a + 2c$; в) $8 + 8a$; д) $ab - bc$; ж) $cd + d$;
б) $3x - 9y$; г) $16z - 20y$; е) $4a + ab$; з) $x - 2xy$.

818. а) $abc - abd$; в) $xyz + yzd$; д) $4ab - 2ac - 6ad$;
б) $4cx - acx$; г) $ad + bd + cd$; е) $abx - acx - adx$.

819. Найдите значение выражения $ax - ay + az$:
а) при $a = 58$, $x = 96$, $y = 12$, $z = 16$;
б) при $a = 3{,}7$, $x = 2{,}8$, $y = 4{,}8$, $z = 2$.

820. Вынесите общий множитель за скобки:
а) $x^2 + x^6$; д) $ab + a^2$; и) $p^2x + px^2$;
б) $5z^4 + 15z^8$; е) $y^3 - 4y^2$; к) $2ac - 4bc$;
в) $6y^4 - 9y^2$; ж) $ab^2 - a^2b$; л) $3x^2 + 3x^3y$;
г) $x^2 - 2xy$; з) $x^2y^2 - 2xy$; м) $6a^2b + 3ab^2$.

821. Найдите значение выражения:
а) $x^2 + 2x$ при $x = 98$; при $x = -202$;
б) $10a^2 - a^3$ при $a = 11$; при $a = 9$.

822. Вычислите:
а) $\dfrac{2^{12} - 2^9}{7 \cdot 2^8}$; б) $\dfrac{2 \cdot 5^{10} - 5^{11}}{6 \cdot 5^{11}}$; в) $\dfrac{3^{12} + 3^{10}}{3^8}$; г) $\dfrac{5^8 + 5^6}{2 \cdot 5^7}$.

823. Представьте выражение в виде произведения двумя способами по следующему образцу:

$$ab - ac = a(b - c), \quad ab - ac = -a(-b + c) = -a(c - b):$$

а) $xy - xz$; в) $3a - 3b$; д) $2dc - 10d$;
б) $mn - nk$; г) $5xy - 5xz$; е) $6ab - 3a$.

824. Вынесите за скобки множитель $-3a$:
а) $-3a^2 + 3ab$; в) $-3ax + 6ay$; д) $-9ax - 3a^4y$;
б) $-3a - 3a^2c$; г) $3a - 3ab$; е) $3a^5 - 3a$.

825. (*Задание с выбором ответа.*) Какой множитель вынесли за скобки в выражении $18x^2y - 24xy^2$, если в скобках осталось $4y - 3x$?

А. $-3x^2y^2$. **Б.** $3xy$. **В.** $-6xy$. **Г.** $6xy$.

Разложите на множители (**826—827**).

826. а) $nm^2 + mn + n^2$; г) $3x^3 - 2x^2 - x$;
б) $-m^3 - m^2n - mn^2$; д) $3n^6 + 6n^5 - 12n^4$;
в) $ax^2 + a^2x - ax$; е) $-6m^4 - 4m^5 - 2m^6$.

827. а) $10xy^2 - 35x^3y^3$; в) $24m^2n^5 - 16m^2n^3$;
б) $9a^6b^3 + 12a^3b^4$; г) $7b^3c^3 + 14b^4c^2$.

Сократите дробь (828—829).

828. а) $\frac{6a+6b}{9a}$; в) $\frac{ab-ad}{abd}$; д) $\frac{ax-ay}{ax+ay}$; ж) $\frac{axy+ax}{ax+axz}$;

б) $\frac{8y}{4x-4y}$; г) $\frac{xyz}{xz-yz}$; е) $\frac{3cd+3d}{6cd-3d}$; з) $\frac{ad+acd}{abd-acd}$.

829. а) $\frac{ay-az}{by-bz}$; в) $\frac{a^2-ab}{ab-b^2}$; д) $\frac{2c-8cx}{3a-12ax}$; ж) $\frac{x^2+xy}{x^2+2xy+y^2}$;

б) $\frac{3+6c}{2+4c}$; г) $\frac{ax+2x}{ay+2y}$; е) $\frac{an+n^2}{an+a^2}$; з) $\frac{a^2-2ab+b^2}{3a-3b}$.

Б

830. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $2a^2b^2 - 6ab^2 + 2a^2b$; в) $12xy^2z^2 - 8x^2yz^2 - 2x^2y^2z$;

б) $3a^3m + 9a^2m - 6am^2$; г) $-4a^4b^2c - 8a^4b^3c - 16a^3b^2c$.

831. Вычислите, применяя вынесение за скобки общего множителя:

а) $21 \cdot 12 + 21 \cdot 14 + 26 \cdot 79$; б) $4{,}3 \cdot 2{,}8 - 3{,}8 \cdot 1{,}2 - 2{,}8 \cdot 3{,}1$.

832. Найдите значение выражения:

а) $\frac{5 \cdot 4^{27} - 21 \cdot 4^{26}}{2^{50}}$; б) $\frac{3^{51} - 4 \cdot 3^{50}}{9^{26}}$.

833. Докажите, что значение выражения:

а) $6^5 + 6^4$ делится на 7; в) $3^4 + 3^5 + 3^6$ делится на 13;

б) $9^4 - 9^3$ делится на 8; г) $2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8$ делится на 5.

Разложите на множители (834—836).

834. а) $(x + 1) + x(x + 1)$; в) $y(a - y) - y^2(a - y)$;

б) $m^2(n + 1) + 2m(n + 1)$; г) $a(a - 1) - (a - 1)$.

835. а) $x(y - z) + 3(z - y)$; г) $x(x - 4) - 5(4 - x)$;

б) $a(b - c) - b(c - b)$; д) $b(b - 1) + (1 - b)$;

в) $m(n - 1) + k(1 - n)$; е) $2(p - 2) + p(2 - p)$.

Образец. Разложим выражение $a(x - y) - b(y - x)$ на множители. Так как $y - x = -(x - y)$, то $a(x - y) - b(y - x) = a(x - y) + b(x - y) = (x - y)(a + b)$.

836. а) $2(x - y) + (x - y)^2$; г) $(x - y) + x(y - x)$;

б) $(a + b)^2 - (a + b)(a - b)$; д) $n(m - n)^2 - (n - m)^3$;

в) $x(x - y)^2 - y(y - x)^2$; е) $a(a - c)^2 - c(a - c)(c - a)$.

837. Преобразуйте в многочлен, применяя вынесение общего множителя за скобки:

а) $(b - 1)(b + 2) - (b - 2)(b + 2) + (b - 3)(b + 2) - (b - 4)(b + 2)$;

б) $(x + y)(x + 1) - (x + y)(1 - y) - (x + y)(x - y)$.

838. Известно, что $m - n = \frac{3}{4}$. Чему равно значение выражения:

а) $\frac{n}{mn - n^2}$; б) $\frac{m}{mn - m^2}$; в) $\frac{n^2 - 2mn + m^2}{3m - 3n}$?

839. Чтобы использовать калькулятор для вычисления значения многочлена $4{,}5x^3 - 7x^2 + 2x - 2{,}5$, этот многочлен удобно представить в таком виде:

$$4{,}5x^3 - 7x^2 + 2x - 2{,}5 = (4{,}5x^2 - 7x + 2)x - 2{,}5 =$$
$$= ((4{,}5x - 7)x + 2)x - 2{,}5.$$

Выполните вычисления для $x = 1{,}2$. Используя рассмотренный прием, найдите значение выражения:

а) $6{,}5x^3 - 5x^2 + 4x - 7$ при $x = 0{,}8$;

б) $0{,}5x^4 - 3x^3 + 5{,}2x - 2$ при $x = 5$.

840. Докажите, что:

а) разность между квадратом любого натурального числа и этим числом является четным числом;

б) сумма двух последовательных степеней числа 2 делится на 6;

в) сумма двух последовательных степеней любого натурального числа делится на следующее за ним число.

Проиллюстрируйте каждое из этих утверждений конкретным примером.

8.2 Способ группировки

Попробуем разложить на множители многочлен

$$ax - bx + ay - by.$$

Его члены не имеют общего множителя. Однако их можно сгруппировать таким образом, что слагаемые в каждой группе будут иметь общий множитель и его можно будет вынести за скобки:

$$ax - bx + ay - by = (ax - bx) + (ay - by) = x(a - b) + y(a - b).$$

Вынесем общий множитель за скобки:

$$x(a - b) + y(a - b) = (a - b)(x + y).$$

Таким образом,

$$ax - bx + ay - by = (a - b)(x + y).$$

Способ, который мы применили для разложения на множители, так и называется — **способ группировки**.

Заметим, что совсем необязательно группировать те слагаемые, которые расположены рядом. Так, для многочлена

$$ax - bx + ay - by$$

к нужному результату приведет и группировка первого слагаемого с третьим, а второго — с четвертым:

$$ax - bx + ay - by = a(x + y) - b(x + y) = (x + y)(a - b).$$

■ Пример. Воспользуемся способом группировки для разложения на множители многочлена

$$2a - 2b + 2c - 3ab + 3b^2 - 3bc.$$

Этот многочлен можно представить или в виде суммы трех двучленов, или в виде суммы двух трехчленов. В первом случае преобразования будут такими:

$$2a - 2b + 2c - 3ab + 3b^2 - 3bc = (2a - 3ab) - (2b - 3b^2) + (2c - 3bc) =$$
$$= a(2 - 3b) - b(2 - 3b) + c(2 - 3b) = (2 - 3b)(a - b + c).$$

Во втором случае получим

$$2a - 2b + 2c - 3ab + 3b^2 - 3bc = (2a - 2b + 2c) - (3ab - 3b^2 + 3bc) =$$
$$= 2(a - b + c) - 3b(a - b + c) = (a - b + c)(2 - 3b).$$

A

841. Представьте выражение в виде произведения:

а) $2x(x - y) + 3y(x - y)$;
б) $a(a + b) - 5b(a + b)$;
в) $m(m - n) - (m - n)$;
г) $3a(a + z) + (a + z)$.

842. Разложите на множители:

а) $3a + 3b + c(a + b)$;
б) $2(m + n) + km + km$;
в) $by + 4(x + y) + bx$;
г) $a(x - y) + bx - by$;
д) $3b - 3c + a(b - c)$;
е) $ab + 2(b - d) - ad$.

843. Разложите многочлен на множители, группируя одночлены разными способами:

а) $xy + xz + 6y + 6z$;
б) $4a + 4b + bx + ax$;
в) $cb + 3a + 3b + ac$;
г) $cd + 2b + bd + 2c$.

844. Заключите два последних слагаемых в скобки, поставив перед ними знак «−», и затем выполните разложение на множители:

а) $x(y + z) - 2y - 2z$;
б) $a(b + c) - b - c$;
в) $a(b - c) - 4b + 4c$;
г) $a(a - b) - ac + bc$;
д) $x(y - z) - y + z$;
е) $2b(x - y) + y - x$;
ж) $5(c - b) + ab - ac$;
з) $2(x - c) - bx + bc$.

845. Разложите на множители:

а) $ab + ac - b - c$;
б) $mn - m + n - 1$;
в) $bd - ad + 3a - 3b$;
г) $2b - 2c + ab - ac$;
д) $ab - ac + 5b - 5c$;
е) $xy - xz - y + z$;
ж) $km - k - 2m + 2$;
з) $3x - 3y - 2ax + 2ay$.

Б

846. Впишите вместо многоточия такое слагаемое, чтобы многочлен можно было разложить на множители:

а) $ax + bx + ca$ ...; в) $m^2n - m - 2n$ ...;

б) $n^3 - 2n^2 + n$ ...; г) $mc + c - mb$ ... .

847. (*Задание с выбором ответа.*) Укажите второй множитель в разложении на множители выражения

$$a^2 + ax - a - x = (a + x)(\ldots).$$

А. $a - x$. **Б.** $x - 1$. **В.** $a - 1$. **Г.** $a + 1$.

848. Разложите на множители многочлен:

а) $a^2 + ad - a - d$; д) $b^2c^2 + c^3 - b^3 - bc$;

б) $y^3 - xy^2 + y - x$; е) $a^3 - 3a^2 + a - 3$;

в) $3ab - b^2 + 3a^2 - ab$; ж) $8x^3 + 2x^2 + 4x + 1$;

г) $6y^2 - 3y + 2ay - a$; з) $5a^3c - a^3 + 5bc - b$.

849. Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

а) $m^2 - m - mn + n$ при $m = 17{,}2$, $n = 7{,}2$;

б) $2xy - 3x + 3y - 2y^2$ при $x = 11{,}5$, $y = 6{,}5$;

в) $x^3 = x^2y + xy^2 - y^3$ при $x = y = -19{,}5$;

г) $m^3 + m^2n - mn - n^2$ при $m = 11{,}2$, $n = -11{,}2$.

Разложите на множители (**850—851**).

850. а) $ax - a + bx - b + cx - c$;

б) $ax + bx - ay - by + az + bz$;

в) $ax - bx - x + ay - by - y$;

г) $2a^2 - a + 2ab - b - 2ac + c$;

д) $a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5$;

е) $px^2 + qx + q^2y + pqxy + p^2qx + pq^2$.

851. а) $xy(x - y) - xz(y - z) - xz(x - y) + yz(y - z)$;

б) $(a - x)(x - y)(y + x + a) - (y - x)(x - a)(y - x - a)$.

852. Разложите на множители трехчлен:

а) $a^2 + 5ab + 4b^2$; в) $b^2 + 5b + 6$;

б) $c^2 - 4cb + 3b^2$; г) $c^2 - 7c + 12$.

Образец. Разложим на множители многочлен

$$2x^2 + 5xy + 2y^2.$$

Чтобы применить группировку, разобьем слагаемое $5xy$ на два одночлена: xy и $4xy$. Получим

$$2x^2 + 5xy + 2y^2 = 2x^2 + xy + 4xy + 2y^2 = x(2x + y) + 2y(2x + y) = (2x + y)(x + 2y).$$

8.3 Формула разности квадратов

Двучлен $a^2 - b^2$ представляет собой разность квадратов. Оказывается, это выражение можно разложить на множители. При этом получится красивая и легко запоминающаяся формула.

Чтобы воспользоваться способом группировки, прибавим к двучлену $a^2 - b^2$ выражение ab и вычтем его:

$$a^2 - b^2 = a^2 - b^2 + ab - ab = a(a + b) - b(a + b) = (a - b)(a + b).$$

Мы получили **формулу разности квадратов**:

$$\mathbf{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).}$$

Разность квадратов двух чисел равна произведению разности этих чисел и их суммы.

Приведем примеры применения формулы разности квадратов.

■ Пример 1. Разложим на множители двучлен $9 - 4x^2$.

Данное выражение можно представить в виде разности квадратов двух выражений: $9 - 4x^2 = 3^2 - (2x)^2$.

Теперь воспользуемся формулой:

$$\begin{array}{ccccccccc} 3^2 & - & (2x)^2 & = & (3 & - & 2x)(3 & + & 2x). \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow\ \ \uparrow & & \uparrow \\ a^2 & - & b^2 & = & (a & - & b)\ (a & + & b). \end{array}$$

Таким образом,

$$9 - 4x^2 = (3 - 2x)(3 + 2x).$$

■ Пример 2. Докажем, что разность $76^2 - 14^2$ делится на 6. Разложим разность $76^2 - 14^2$ на множители:

$$76^2 - 14^2 = (76 - 14)(76 + 14) = 62 \cdot 90 =$$
$$= 2 \cdot 31 \cdot 3 \cdot 30 = 6 \cdot 31 \cdot 30.$$

Так как произведение $6 \cdot 31 \cdot 30$ делится на 6, то и разность $76^2 - 14^2$ делится на 6.

Формула разности квадратов фактически является еще одной формулой сокращенного умножения. Только с этой целью применять ее надо справа налево:

$$\mathbf{(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.}$$

Произведение разности двух чисел и их суммы равно разности квадратов этих чисел.

С помощью этой формулы можно преобразовать произведение разности и суммы любых двух выражений.

■ Пример 3. Умножим разность $5x - 2y$ на сумму $5x + 2y$:

$$(5x - 2y)(5x + 2y) = (5x)^2 - (2y)^2 = 25x^2 - 4y^2.$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

■ Пример 4. Упростим выражение $6c^2 - (2c - b)(b + 2c)$:

$$6c^2 - (2c - b)(2c + b) = 6c^2 - (4c^2 - b^2) =$$
$$= 6c^2 - 4c^2 + b^2 = 2c^2 + b^2.$$

Мы заменили сумму $b + 2c$ равным выражением $2c + b$, переставив слагаемые, а затем воспользовались формулой разности квадратов.

A

853. Какие из выражений можно разложить на множители, применив формулу разности квадратов:

а) $a^2 - 9$; г) $49 - p^2$; ж) $6a^2 - b^2$;
б) $b^2 + 1$; д) $25 + x^2$; з) $16x - y^2$;
в) $4 - y^2$; е) $1 - c^2$; и) $x^2y^2 - 4$?

Разложите на множители (**854—857**).

854. а) $x^2 - y^2$; в) $a^2 - 9$; д) $x^2 - 1$; ж) $a^2 - 0{,}01$;
б) $y^2 - x^2$; г) $16 - b^2$; е) $1 - a^2$; з) $\frac{4}{9} - x^2$.

855. а) $9x^2 - 4$; в) $16 - 49y^2$; д) $16m^2 - 9n^2$; ж) $4x^2 - 1$;
б) $4a^2 - 25$; г) $9a^2 - 4b^2$; е) $25x^2 - y^2$; з) $1 - 36a^2$.

856. а) $0{,}25a^2 - 1$; в) $0{,}09x^2 - y^2$; д) $1{,}44a^2 - 1{,}21$;
б) $0{,}16 - 4b^2$; г) $100y^2 - 0{,}01x^2$; е) $\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{9}b^2$.

857. а) $x^2y^2 - z^2$; в) $9 - m^2n^2$; д) $y^4 - x^2$; ж) $x^{10} - 25$;
б) $a^2b^2 - 16$; г) $b^2c^2 - 1$; е) $y^6 - 9$; з) $9 - b^4$.

858. Вычислите:
а) $37^2 - 13^2$; б) $72^2 - 28^2$; в) $42{,}4^2 - 42{,}3^2$; г) $6{,}8^2 - 3{,}2^2$.

859. а) Делится ли значение выражения $35^2 - 11^2$ на 2? на 3? на 4? на 5? на 6? на 12? на 22? на 23? на 24?
б) Укажите 10 делителей числа, равного $97^2 - 43^2$.

860. Сократите дробь:
а) $\frac{a+b}{a^2-b^2}$; в) $\frac{a^2-1}{ab-b}$; д) $\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$;
б) $\frac{x-y}{x^2-y^2}$; г) $\frac{ab-3a}{b^2-9}$; е) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$.

Выполните умножение (**861—863**).

861. а) $(y-3)(y+3)$; г) $(x+y)(x-y)$;
б) $(1-x)(1+x)$; д) $(x-2)(2+x)$;
в) $(m-n)(m+n)$; е) $(c+a)(a-c)$.

862. а) $(1+3m)(1-3m)$; г) $(a-3b)(3b+a)$;
б) $(2x-1)(2x+1)$; д) $(4x+3y)(3y-4x)$;
в) $(2x-y)(2x+y)$; е) $(5b-10c)(5b+10c)$.

863. а) $(x^2+2)(x^2-2)$; г) $(x^3+5)(x^3-5)$;
б) $(y-a^2)(y+a^2)$; д) $(ab-c)(ab+c)$;
в) $(a^2-4)(a^2+4)$; е) $(1-xy)(xy+1)$.

864. Вычислите, используя формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

а) $19 \cdot 21$; б) $99 \cdot 101$; в) $28 \cdot 32$; г) $4\frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{2}$.

Образец.
$49 \cdot 51 = (50-1)(50+1) = 50^2 - 1 = 2500 - 1 = 2499.$

Представьте выражение в виде многочлена (**865—867**).

865. а) $2y^2+(y-2)(y+2)$; в) $(2b-c)(2b+c)-2c^2$;
б) $15-(a+3)(a-3)$; г) $(1-3k)(1+3k)-k^2$.

866. а) $(a-1)(a+1)+a(a-2)$;
б) $(2x-y)(y+2x)+x(4-3x)$;
в) $5c(c+1)-(b-3c)(b+3c)$;
г) $(y-2)(y+2)+(3-y)(3+y)$;
д) $(a+b)(a-b)-(a-b)^2$;
е) $(2a+1)^2+(1-2a)(1+2a)$.

867. а) $a(a+1)(a-1)$; в) $2b(c-b)(c+b)$;
б) $-2(x-2)(x+2)$; г) $3a(1+b)(b-1)$.

Б

868. Вычислите:

а) $\frac{1-0{,}8^2}{0{,}6}$; в) $\frac{6{,}4}{4^2-0{,}8^2}$; д) $\frac{1{,}7^2-1{,}3^2}{2{,}8^2-2{,}2^2}$;

б) $\frac{1{,}4^2-0{,}5^2}{0{,}3^2}$; г) $\frac{0{,}3^2}{0{,}4^2-0{,}2^2}$; е) $\frac{1{,}2^2-0{,}3^2}{0{,}8^2-0{,}7^2}$.

869. Представьте в виде произведения:
а) $(k+m)^2-n^2$; г) $(x+y)^2-(x-y)^2$;
б) $(p-n)^2-1$; д) $(x-1)^2-(x+1)^2$;
в) $(x-y)^2-1$; е) $(a-2b)^2-(2a-b)^2$.

870. Разложите на множители:

а) $(a + b) + (a^2 - b^2)$; г) $(2 - x) - (4 - x^2)$;

б) $(x - y) + (x^2 - y^2)$; д) $(y - 1)^2 - (y^2 - 1)$;

в) $(b + c) - (b^2 - c^2)$; е) $(a^2 - 4) + (a - 2)^2$.

871. Докажите, что:

а) разность квадратов двух последовательных натуральных чисел равна сумме этих чисел;

б) разность квадратов двух последовательных четных чисел равна удвоенной сумме этих чисел.

Проиллюстрируйте доказанные утверждения конкретными примерами.

872. Возьмите любые три последовательных натуральных числа и убедитесь в том, что произведение крайних из них равно квадрату среднего, уменьшенному на единицу. Докажите это утверждение. (Обозначьте среднее число буквой n.)

Представьте в виде многочлена (**873—874**).

873. а) $(a + 3)(a - 3) + (a + 2)(a - 2) - a(2a + 1) + 4$;

б) $(x + 1)(x - 1) + (x + 5)(x - 5) - 2x(x + 3) + 6$;

в) $(1 - 2x)(1 + 2x) - (2 - x)(2 + x) + 5(x^2 - 1) - 3$.

874. а) $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$; в) $(1 - a)(1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)$;

б) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$; г) $(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1)$.

875. Используйте формулу $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ для преобразования произведения в многочлен:

а) $(ax + ay)(x - y)$; д) $(a + b - c)(a + b + c)$;

б) $(x + y)(x^2 - xy)$; е) $(x + y - z)(x - y + z)$;

в) $(b - c)(2ac + 2ab)$; ж) $(a^2 + 2a - 1)(a^2 - 2a + 1)$;

г) $(2 + x)(6y - 3xy)$; з) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

8.4 Формулы разности и суммы кубов

Формулой разности кубов называют равенство

$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).}$$

Подобрать соответствующую группировку для его доказательства достаточно трудно. Поэтому убедимся в справедливости этого равенства, перемножив многочлены в правой части:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + \underline{a^2b} + \underline{\underline{ab^2}} - \underline{a^2b} - \underline{\underline{ab^2}} - b^3 = a^3 - b^3.$$

Читается эта формула так:

разность кубов двух чисел равна произведению разности этих чисел и неполного квадрата их суммы.

В этой формулировке выражение $a^2 + ab + b^2$ названо *неполным квадратом*. Такое название принято из-за его внешнего сходства с выражением $a^2 + 2ab + b^2$, равным квадрату суммы $a + b$.

Приведем пример применения этой формулы для разложения многочлена на множители.

■ Пример. Разложим на множители выражение $1 - 8x^3$.

Двучлен $1 - 8x^3$ можно представить в виде разности кубов:

$$1 - 8x^3 = 1^3 - (2x)^3.$$

Теперь применим формулу:

$$1^3 - (2x)^3 = (1 - 2x)(1 + 2x + 4x^2).$$

Формула суммы кубов выглядит так:

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).}$$

Сумма кубов двух чисел равна произведению суммы этих чисел и неполного квадрата их разности.

Докажите эту формулу самостоятельно.

А

876. Выполните умножение по правилу умножения многочленов:

а) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$; б) $(a - c)(a^2 + ac + c^2)$.

877. Выполните умножение, используя формулу суммы кубов или разности кубов:

а) $(m - 1)(m^2 + m + 1)$; в) $(2a + 2b)(4a^2 - 4ab + 4b^2)$;

б) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$; г) $(2 - y^2)(4 + 2y^2 + y^4)$.

Разложите на множители (**878—879**).

878. а) $x^3 + y^3$; в) $m^3 + 27$; д) $y^3 + \frac{1}{8}$;

б) $x^3 + 1$; г) $8 + c^3$; е) $\frac{8}{27} + z^3$.

879. а) $p^3 - q^3$; в) $1 - x^3$; д) $b^3 - \frac{1}{125}$;

б) $a^3 - 8$; г) $-x^3 + y^3$; е) $\frac{1}{27} - t^3$.

880. Примените для разложения на множители, если это возможно, формулу суммы или разности кубов:

а) $8x^3 + y^3$; в) $1 - 27a^3$; д) $x^6 - \frac{1}{8}z^2$;

б) $9a^3 + b^3$; г) $8m^3 - 64n^3$; е) $\frac{1}{8}t^3 + 8s^3$.

881. Составьте выражения, которые можно разложить на множители с помощью формул суммы кубов или разности кубов, и выполните эти преобразования.

Б

882. Упростите выражение:

а) $(a-b)(a^2+ab+b^2)+(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

б) $(x+2)(x^2-2x+4)-(x-2)(x^2+2x+4)$;

в) $y(y-1)(y+1)-(y-3)(y^2+3y+9)$;

г) $x(x+3)^2-(x+2)(x^2-2x+4)-2(x-2)(3x+2)$.

Разложите на множители (**883—884**).

883. а) x^3y^3-1; в) $1-m^3n^3p^3$;

б) $8a^3b^3+c^3$; г) $x^3y^3+8a^3z^3$.

884. а) $(x+y)^3-(x-y)^3$; в) $(n+3)^3-(n-3)^3$;

б) $(a-b)^3+(a+b)^3$; г) $(m-1)^3+(m+1)^3$.

885. Сократите дробь:

а) $\frac{a-b}{a^3-b^3}$; в) $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$; д) $\frac{m^3+n^3}{2\left(m^2-mn+n^2\right)}$;

б) $\frac{p^3+q^3}{2p+2q}$; г) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^3+b^3}$; е) $\frac{a^2-az}{a^3-z^3}$.

886. Докажите, что:

а) $\frac{a^3+b^3}{a+b}+ab=a^2+b^2$; б) $\frac{a^3-b^3}{a-b}+ab=(a+b)^2$.

887. Выполните умножение, применяя формулу разности или суммы кубов:

а) $(m+1)((m^2-m+1)+3)$; в) $(a+b)(a^2-3ab+b^2)$;

б) $(x+1)(x^2-x+7)$; г) $(p-q)(p^2+3pq+q^2)$.

888. Представьте выражение в виде многочлена:

а) $(a-b)(a+b)(a^4+a^2b^2+b^4)$;

б) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^8+x^4+1)$;

в) $(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$;

г) $(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2$.

8.5 Разложение на множители с применением нескольких способов

Мы рассмотрели разные приемы, с помощью которых многочлен можно разложить на множители: вынесение общего множителя за скобки, способ группировки, применение формул сокращенного умножения. В более сложных случаях для достижения цели приходится

последовательно применять несколько приемов. Никаких общих правил, помогающих установить, какие способы и в каком порядке следует применять, не существует. Все зависит от вашего опыта и наблюдательности. Более того, разложение многочлена на множители не всегда возможно. Однако некоторых рекомендаций все же следует придерживаться. Приведем их:

1. Если можно вынести за скобки общий множитель, сделайте это.
2. Посмотрите, нельзя ли воспользоваться какой-нибудь формулой:
   — если имеется двучлен, то проверьте, нельзя ли применить формулу разности квадратов или же формулу разности (суммы) кубов;
   — если имеется трехчлен, то проверьте, нельзя ли свернуть его в квадрат двучлена.
3. Если не удается применить формулы сокращенного умножения, то попытайтесь воспользоваться способом группировки.
4. Когда вы закончили разложение на множители, полезно проверить с помощью умножения, получен ли вами верный результат.

■ Пример 1. Разложим на множители многочлен $3a^2b - 12b$.

Начнем преобразование с вынесения за скобки общего множителя $3b$:

$$3a^2b - 12b = 3b(a^2 - 4).$$

Многочлен, оставшийся в скобках, можно разложить на множители с применением формулы разности квадратов:

$$3b(a^2 - 4) = 3b(a - 2)(a + 2).$$

Таким образом,

$$3a^2b - 12b = 3b(a - 2)(a + 2).$$

■ Пример 2. Разложим на множители многочлен

$$25 - a^2 + 2ab - b^2.$$

В этой сумме естественно сгруппировать последние три слагаемых:

$$25 - a^2 + 2ab - b^2 = 25 - (a^2 - 2ab + b^2) = 25 - (a - b)^2.$$

Теперь можно воспользоваться формулой разности квадратов:

$$25 - (a - b)^2 = 5^2 - (a - b)^2 =$$
$$= (5 - (a - b))(5 + (a - b)) = (5 - a + b)(5 + a - b).$$

Итак,

$$25 - a^2 + 2ab - b^2 = (5 - a + b)(5 + a - b).$$

■ Пример 3. Разложим на множители многочлен

$$ax + ay + x^2 + 2xy + y^2.$$

Этот многочлен состоит из пяти членов. Сгруппировав два первых и три последних члена, получим

$$ax + ay + x^2 + 2xy + y^2 = a(x + y) + (x + y)^2 =$$
$$= (x + y)(a + x + y).$$

■ Пример 4. Разложим на множители многочлен $a^6 - b^6$.

Представим выражение $a^6 - b^6$ в виде разности квадратов и воспользуемся соответствующей формулой:

$$a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3).$$

Теперь применим формулы разности и суммы кубов:

$$(a^3 - b^3)(a^3 + b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Окончательно имеем $a^6 - b^6 = (a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$.

Разложение на множители можно выполнить иначе, представив исходное выражение в виде разности кубов:

$$a^6 - b^6 = (a^2)^3 - (b^2)^3 = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) =$$
$$= (a - b)(a + b)(a^4 + a^2b^2 + b^4).$$

Сравнивая результаты, нетрудно понять, что преобразование можно продолжать, разложив на множители многочлен $a^4 + a^2b^2 + b^4$.

Прибавим и вычтем одно и то же выражение a^2b^2:

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 =$$
$$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2).$$

Таким образом, мы пришли к уже известному результату:

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2).$$

А

Разложите на множители (**889—892**).

889. а) $3a^2 - 3b^2$; д) $5x^2 - 5$; и) $x^3 - 9x$;
б) $12m^2 - 12n^2$; е) $2a^2 - 8$; к) $3y^3 - 3y$;
в) $ax^2 - ay^2$; ж) $3an^2 - 27a$; л) $2a^3 - 8a$;
г) $2a^2x - 2b^2x$; з) $2xy^2 - 50x$; м) $40b - 10b^3$.

890. а) $3a^2 - 6a + 3$; г) $-2a^2 - 4ab - 2b^2$;
б) $ay^2 - 2ay + a$; д) $nx^2 + 4nx + 4n$;
в) $8x^2 + 16xy + 8y^2$; е) $4x^2y - 4xy + y$.

891. а) $2x^3 + 2y^3$; в) $am^3 - an^3$; д) $5 + 5b^3$;
б) $-3a^3 - 3b^3$; г) $2m^3 - 16$; е) $-c^4 + 27c$.

892. а) $a^4 - b^4$; в) $n^4 - 16$; д) $1 - c^4$;
б) $x^4 - x^2$; г) $a^4 - 9a^2$; е) $x^2 - 16x^4$.

Б

Разложите на множители (**893—900**).

893. а) $x^8 - y^8$; в) $x^4 - x^8$; д) $a^6 - 2^6$;
б) $a^8 - b^4$; г) $a^9 - 1$; е) $x^6 - 1$.

894. а) $x^2y + 2xy^2 + y^3$; в) $-9ay^2 - 6ay - a$;
б) $a^3x - 4a^2x + 4ax$; г) $6bc^2 - 3b^2c - 3c^3$.

895. а) $b^2 - c^2 - b + c$; в) $a^2 - a - c^2 + c$;
б) $a + b - a^2 + b^2$; г) $m - m^2 - n + n^2$.

896. а) $a^3 + a^2 - a - 1$; в) $ab^2 + cd^2 - ad^2 - b^2c$;
б) $b^2 - bc - a^2 + ac$; г) $x^2y^2 + 1 - y^2 - x^2$.

897. а) $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2$; в) $n^4 + an^3 - n - a$;
б) $xy^2 + x^2y - x^3 - y^3$; г) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

898. а) $ax + ay - x^2 - 2xy - y^2$; г) $9a^4 + 6a^2c + c^2 - 9$;
б) $a^2 - 2ab + b^2 - a + b$; д) $ma^2 - m^3 - 2m^2 - m$;
в) $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$; е) $4x^5 + 4x^3y + xy^2 - 4x$.

899. а) $x^2(x - 3) + 10x(x - 3) + 25(x - 3)$;
б) $4c^2(c + 2) + 9(c + 2) - 12c(c + 2)$;
в) $a^2 - 25 - 2a(a^2 - 25) + a^2(a^2 - 25)$;
г) $6x(y^2 - 1) + 9x^2(y^2 - 1) - 1 + y^2$.

900. а) $(a - x)(x^2 - y^2) - (x - y)(a^2 - x^2)$;
б) $(a - x)(x^3 - y^3) - (x - y)(a^3 - x^3)$.

901. Трехчлен $x^2 - 6x + 8$ можно разложить на множители, выделив квадрат двучлена:

$$x^2 - 6x + 8 = x^2 - 6x + 8 + 1 - 1 = (x^2 - 6x + 9) - 1 =$$
$$= (x - 3)^2 - 1 = (x - 3 - 1)(x - 3 + 1) = (x - 4)(x - 2).$$

Разложите на множители трехчлен:
а) $a^2 + 4a - 5$; б) $x^2 - 2x - 24$; в) $a^2 + 8a + 15$.

902. Разложите выражение на множители двумя способами:
1) применив формулу разности квадратов;
2) раскрыв скобки и затем применив группировку:
а) $(1 + ab)^2 - (a + b)^2$; б) $(a + 2x)^2 - (2 + ax)^2$.

903. Докажите, что разность между кубом любого натурального числа и этим числом делится на 6.

904. (*Задача-исследование.*)
1) Докажите, что:
а) $\dfrac{x^{16} - y^{16}}{x - y} = (x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8)$;
б) $\dfrac{x^{64} - y^{64}}{x - y} = (x + y)(x^2 + y^2) \ \dots \ (x^{32} + y^{32})$.
2) Сократите дробь $\dfrac{x^{2^{10}} - y^{2^{10}}}{x - y}$.

8.6 Решение уравнений с помощью разложения на множители

Произведение двух или нескольких чисел равно нулю в том и только в том случае, когда хотя бы одно из этих чисел равно нулю.

Покажем, как это свойство произведения используется для решения уравнений.

■ Пример 1. Решим уравнение $(x + 3)(5x - 4) = 0$.

Равенство нулю произведения $(x + 3)(5x - 4)$ означает, что

$$x + 3 = 0 \text{ или } 5x - 4 = 0.$$

Наше уравнение распалось на два более простых уравнения. Решим каждое из них:

$$\begin{array}{l|l} x + 3 = 0, & 5x - 4 = 0, \\ x = -3. & 5x = 4, \\ & x = 0{,}8. \end{array}$$

Значит, произведение $(x + 3)(5x - 4)$ обращается в нуль при $x = -3$ и при $x = 0{,}8$.

Таким образом, уравнение $(x + 3)(5x - 4) = 0$ имеет два корня: -3 и $0{,}8$.

■ Пример 2. Решим уравнение $4x^2 - 9 = 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители, а затем воспользуемся для его решения приемом, рассмотренным в предыдущем примере:

$$(2x - 3)(2x + 3) = 0.$$

$$\begin{array}{lcl} 2x - 3 = 0, & \text{или} & 2x + 3 = 0, \\ 2x = 3, & | & 2x = -3, \\ x = 1{,}5. & | & x = -1{,}5. \end{array}$$

Ответ. 1,5; −1,5.

А

905. Является ли корнем уравнения $(x + 8)(2x - 6) = 0$ число: 0; -3; 3; -5; 5; -8; 8?

906. Найдите корни уравнения:

а) $(x + 3)(x - 5) = 0$;
б) $(z - 4)(2z + 1) = 0$;
в) $(7 - x)(3 + 4x) = 0$;
г) $y(3y + 7) = 0$;
д) $-2x(x - 4) = 0$;
е) $y(y + 3)(y - 6) = 0$;
ж) $(1 - x)(3x - 2)(x + 5) = 0$;
з) $z(2 - z)(3 - 2z) = 0$.

Решите уравнение (907—910).

907. а) $3x^2 + 15x = 0$; в) $-2x^2 - 4x = 0$;
б) $9y - y^2 = 0$; г) $x^3 - x^2 = 0$.

908. а) $x^2 - 4 = 0$; в) $1 - z^2 = 0$;
б) $4x^2 - 25 = 0$; г) $3z^2 - 75 = 0$.

909. а) $x^3 - x = 0$; в) $5z^3 - 5z = 0$;
б) $4y - y^3 = 0$; г) $z - 9z^3 = 0$.

910. а) $(2x - 1)^2 = 0$; в) $5y^2 + 20y + 20 = 0$;
б) $x^2 - 10x + 25 = 0$; г) $2y^2 - 12y + 18 = 0$.

Б

911. Найдите корни уравнения подбором, а затем решите это уравнение, применив разложение на множители:
а) $y^2 = y$; б) $a^3 = a$; в) $x^2 = 4x$; г) $t^2 = -5t$.

Найдите корни уравнения (912—913).

912. а) $(x^2 + 3)(x - 7) = 0$; в) $(z - 1)^2(z + 4) = 0$;
б) $(3y - 1)(y^2 + 1) = 0$; г) $(3t + 12)(t + 2)^2 = 0$.

913. а) $3x(x - 1) + (x^2 - 1) = 0$; в) $3(x - 2) + (x^2 - 4) = 0$;
б) $2(y - 1) - (1 - y)^2 = 0$; г) $(y - 3)^2 - 4(3 - y) = 0$.

914. Решите уравнение:
а) $(x + 1)^2 - 4 = 0$; в) $1 - (x - 3)^2 = 0$;
б) $(x + 2)^2 - 9 = 0$; г) $25 - (10 - x)^2 = 0$.

915. Найдите корни уравнения (для разложения многочлена на множители воспользуйтесь способом, рассмотренным в упражнении 901):
а) $x^2 + 4x + 3$; в) $x^2 - 2x - 3$;
б) $x^2 + 2x - 8$; г) $x^2 - 10x + 16$.

916. Решим уравнение $\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\right) = 0$:

$\frac{3}{x} - \frac{1}{4} = 0$, или $\frac{1}{x} + \frac{2}{3} = 0$,

$\frac{3}{x} = \frac{1}{4}$, | $\frac{1}{x} = -\frac{2}{3}$,

$x = 3 \cdot 4$, | $2x = -3$,

$x = 12$. | $x = -1{,}5$.

Ответ. 12; $-1{,}5$.

Решите уравнение, воспользовавшись разобранным приемом:

а) $\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{7}\right)\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{x}\right)=0$; в) $\left(\frac{5}{x}+3\right)\left(\frac{2}{x}+2\right)=0$;

б) $\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{x}\right)\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{x}\right)=0$; г) $\left(\frac{3}{2x}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3x}-\frac{2}{9}\right)=0$.

917. Решите уравнение относительно x:

а) $x^2 - m^2 = 0$; в) $(x + 4 - a)(x + 4 + a) = 0$;

б) $a^2 - x^2 = 0$; г) $25 - (x - b)^2 = 0$.

8.7 Несколько более сложных примеров

(Для тех, кому интересно)

Теория многочленов в математике развивалась в связи с решением уравнений и делимостью целых чисел. И в тех и в других задачах полезно разложить многочлен на множители, и именно поэтому разложение на множители является основной задачей теории многочленов.

Для решения этой задачи в разных случаях придумано немало приемов и формул, некоторые из которых вам уже известны.

Но, как уже говорилось, общего алгоритма разложения многочлена на множители нет. Это всегда искусство. Это красиво, но непросто.

Вспомним, например, известную вам формулу разности кубов:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Мы легко доказали эту формулу, преобразовав правую часть и получив левую. Это оказалось несложным только потому, что формула была сразу предъявлена. Но можно попробовать самим открыть эту формулу. Например, так:

$$a^3 - b^3 = a^3 - a^2b + a^2b - b^3 =$$
$$= a^2(a - b) + b(a^2 - b^2) = a^2(a - b) + b(a - b)(a + b) =$$
$$= (a - b)(a^2 + b(a + b)) = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Использованный прием «прибавить — вычесть» вам, конечно, известен. Он очень эффективен, и с его помощью в математике доказывается немало трудных теорем. Однако главная трудность состоит в неясности, что именно надо прибавить и вычесть, чтобы разложить многочлен на множители. Поэтому часто приходится делать много попыток, отказываясь от тупиковых идей и путей решения.

Научиться разложению на множители, развить свою фантазию и изобретательность можно только на собственном опыте.

■ Пример 1. Разложим на множители двучлен $n^4 + 4$.

Выражение $n^4 + 4$ можно записать в виде суммы квадратов: $n^4 + 4 = (n^2)^2 + 2^2$. Далее естественно попробовать прибавить и вычесть удвоенное произведение n^2 и 2, т. е. $4n^2$. Тогда будем иметь

$$n^4 + 4 = (n^2)^2 + 4n^2 + 2^2 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 =$$
$$= (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n).$$

■ Пример 2. Разложим на множители многочлен

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - 6x^2 + 12x - x - 6 =$$
$$= (x^3 - x) - (6x^2 - 12x + 6) = x(x^2 - 1) - 6(x^2 - 2x + 1) =$$
$$= x(x - 1)(x + 1) - 6(x - 1)^2 = (x - 1)(x(x + 1) - 6(x - 1)) =$$
$$= (x - 1)(x^2 + x - 6x + 6) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6).$$

Многочлен на множители разложен, и можно сказать, что поставленная задача решена. Однако можно продолжить преобразования и разложить на множители еще и многочлен $x^2 - 5x + 6$:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x - 2) - 3(x - 2) =$$
$$= (x - 2)(x - 3).$$

Получился более красивый результат:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

■ Пример 3. Решим уравнение $x^4 + x^2 - 2 = 0$.

Мы сможем решить это уравнение, если разложим его левую часть на множители. Это можно сделать, воспользовавшись знакомой вам формулой разности квадратов:

$$x^4 + x^2 - 2 = x^4 - 1 + x^2 - 1 =$$
$$= ((x^2)^2 - 1) + (x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + (x^2 - 1) =$$
$$= (x^2 - 1)(x^2 + 1 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2).$$

Итак, мы разложили многочлен на множители и можем записать данное уравнение в виде $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 2) = 0$.

Двучлен $x^2 + 2$ всегда положителен. Поэтому остается рассмотреть случаи, когда $x - 1 = 0$ или $x + 1 = 0$. Таким образом, уравнение имеет два корня: -1 и 1.

Заметим, что примененный нами способ разложения многочлена $x^4 + x^2 - 2$ на множители вовсе не единственно возможный. Можно, например, разложить этот многочлен на множители, используя тот же прием «прибавить — вычесть», но уже совсем по-другому:

$$x^4 + x^2 - 2 = x^4 - 2x^2 + 1 + 2x^2 - 1 + x^2 - 2 =$$
$$= (x^4 - 2x^2 + 1) + 3x^2 - 3 = (x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) =$$
$$= (x^2 - 1)(x^2 - 1 + 3) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2).$$

Разложите на множители многочлен (**918—919**):

918. а) $a^3 - 5a^2 + 9a - 5$; б) $x^4 + 4x^2y^2 - 5y^4$.

919. а) $n^4 + n^2 + 1$; б) $n^8 + n^4 + 1$.

920. Решите уравнение $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$.

921. Докажите разными способами, что:
а) $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;
б) $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

ДЗ Дополнительные задания к главе 8

Вынесение общего множителя за скобки

922. Вынесите за скобки общий множитель:
а) $a(x - 2) - b(x - 2) + c(2 - x)$;
б) $2a(x - y) + 2b(y - x) - c(x - y)$.

923. Упростите выражение, применяя вынесение за скобки общего множителя:
а) $x(x^2 + xy + y^2) - x(x^2 - xy + y^2)$;
б) $(m(3m - 2n) - m(3n - 2m))n$.

924. Вынесите за скобки общий множитель:
а) $2^{n+1} + 2^n$; в) $3^{2n} - 3^n$;
б) $5^{n-1} - 5^{n+1}$; г) $7^{n+1} + 7^n + 7$.

925. Сократите дробь:

а) $\dfrac{2ab-2a}{4bc-4c}$; б) $\dfrac{a^2-a}{a^3-a^2}$; в) $\dfrac{(m-c)^2}{c^2-cm}$; г) $\dfrac{m^2-2mn+n^2}{an-am}$.

926. Проверьте справедливость равенств:

$$2 \cdot 3 + 3 = 3^2; \quad 3 \cdot 4 + 4 = 4^2; \quad 4 \cdot 5 + 5 = 5^2.$$

Докажите, что если к произведению двух последовательных натуральных чисел прибавить большее из них, то получится квадрат большего числа.

Способ группировки

927. Разложите на множители многочлен:
а) $xyz + 4xz + 3xy + 12x$; в) $m^3 + m^2n - m^2a - mna$;
б) $2a + a^2 + 2a^3 + a^4$; г) $b^4 - b^3 + b^2 - b$.

928. Разложите на множители трехчлен, заменив среднее слагаемое суммой двух одночленов:

а) $x^2 + 6xy + 5y^2$; г) $x^2 + 8x + 7$;

б) $3a^2 + 10ab + 3b^2$; д) $c^2 - 9bc + 20b^2$;

в) $a^2 + 3a + 2$; е) $n^2 + 2n - 3$.

929. Разложите на множители:

а) $3xyz + x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y$.

Указание. Представьте выражение $3xyz$ в виде суммы $xyz + xyz + xyz$ и сгруппируйте члены многочлена.

б) $3abc + ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) + ab + bc + ac$.

930. Сократите дробь:

а) $\dfrac{ax + ay - bx - by}{x^2 + xy}$; в) $\dfrac{ax - ay - x^2 + xy}{ax - a^2}$;

б) $\dfrac{a^2 - 2ab + b^2}{ac - bc + bd - ad}$; г) $\dfrac{b^2 - 2b + 1}{c - bc + a - ab}$.

Разность квадратов

931. Разложите на множители:

а) $a^{2n} - 1$; б) $4 - x^{2n}$; в) $y^{4n} - z^2$; г) $b^{2n} - c^2$.

932. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x + 2}{4 - x^2}$; б) $\dfrac{a^2 - ax}{a^2 - x^2}$; в) $\dfrac{x^2 - y^2}{2ay + 2ax}$; г) $\dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{2x^2 - 2y^2}$.

933. Представьте выражение в виде многочлена, используя формулу разности квадратов:

а) $(m - n)(m + n)(m^2 + n^2)$; в) $((2c + d)^2 - (c + 2d)^2) \cdot 3cd$;

б) $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)x^2$; г) $((a^2 + a)^2 - (a^2 - a)^2) \cdot 5a^2$.

Применение нескольких способов разложения на множители

Разложите на множители (**934—936**).

934. а) $3z^2 - 12$; д) $2b^3 + 54$; и) $m - m^3$;

б) $2x^2 - 50$; е) $3m^3 - 81$; к) $4x^2 + 8x + 4$;

в) $5a^2 + 10a + 5$; ж) $x^3 + 2x^2 + x$; л) $9y - 4y^3$;

г) $2y^2 - 8y + 8$; з) $ax^2 - a$; м) $ax^3 - 8a$.

935. а) $a^3(a - b) - b^3(a - b)$; в) $p^3(p - 1) - 8(p - 1)$;

б) $x^3 + 8y^3 - (x + 2y)$; г) $(a^3 + b^3) + ab(a + b)$.

936. а) $2x^3 - 2xy^2 - 6x^2 + 6y^2$; в) $36x^3 - 144x - 36x^2 + 144$;
б) $5a^2 - 5b^2 - 10a^3b + 10ab^3$; г) $y^3 + ay^2 - b^2y - b^2a$.

937. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^3 - a^2 - a + 1}{a^4 - 2a + 1}$; б) $\dfrac{x^2 + y^2 - z^2 + 2xy}{x^2 - y^2 + z^2 + 2xz}$.

938. Разложите выражение на множители двумя способами:
1) представьте один из двучленов, заключенных в скобки, в виде суммы или разности двух других, например: $x - z = (x - y) + (y - z)$, а затем примените группировку;
2) раскройте скобки в первых двух слагаемых, а затем сгруппируйте члены так, чтобы получился общий множитель:
а) $xy(x - y) - xz(x - z) + yz(y - z)$;
б) $x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$.

Решение уравнений

939. Решите уравнение:
а) $(x - 2)(x + 3) = x(2 - x)$; в) $5(9 - x^2) = x(x - 3)$;
б) $x(2x + 1) = (2x + 1)^2$; г) $2x(x + 1) = x^2 - 1$.

940. При каких значениях переменной равны значения выражений:
а) $5x(x - 1)$ и $x - 1$; б) $b - 6$ и $2b(b - 6)$?

Найдите корни уравнения (**941—942**).

941. а) $\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{3}\right)^2 - 25 = 0$; в) $4 - \left(x - \dfrac{x}{5}\right)^2 = 0$;

б) $\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{4}\right)^2 - 9 = 0$; г) $1 - \left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{5}\right)^2 = 0$.

942. а) $x^3 - 4x^2 + 4x = 0$; в) $1 - 3x + x^2 - 3x^3 = 0$;
б) $2x^3 + 24x^2 + 72x = 0$; г) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$.

? Вопросы для повторения к главе 8

1. Какие способы разложения многочленов на множители вы знаете?
2. На основе какого свойства действия выполняется вынесение за скобки общего множителя? Объясните на примере многочлена $12ab^2 + 3a^2b$, как вынести за скобки общий множитель.
3. Объясните на примере многочлена $ax - bx + ay - by$, как выполняется разложение на множители способом группировки. Покажите разные возможности группировки слагаемых.

4. Запишите формулу разности квадратов и докажите ее. Составьте несколько выражений, которые можно разложить на множители с помощью этой формулы.

5. Запишите формулу разности кубов и докажите ее. Покажите на примере выражения $8 - 27y^3$, как применить эту формулу для разложения его на множители.

6. Запишите формулу суммы кубов и докажите ее. Покажите на примере выражения $1 + \frac{1}{8}a^3$, как применить эту формулу для разложения его на множители.

7. Сформулируйте условие равенства нулю произведения двух или нескольких чисел.

Задания для самопроверки к главе 8

(Обязательные результаты обучения)

Вынесите за скобки общий множитель (1—4).

1. $9x^2 + 3x$.
2. $2ab - ab^2$.
3. $6xy + 3x^2y - 12xy^2$.
4. $5a^4 - 10a^3 + 10a^2$.

Разложите на множители (5—8).

5. $y(y - 1) + 2(y - 1)$.
6. $ax - ay + 2x - 2y$.
7. $x^2 - 64$.
8. $9a^2 - 16b^2$.

Сократите дробь (9—12).

9. $\frac{x^2 + 3x}{3a + ax}$.
10. $\frac{b^2}{b^2 + bc}$.
11. $\frac{2a + 4}{a^2 - 4}$.
12. $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - xy}$.

Выполните действия (13—16).

13. $(x - a)(x + a)$.
14. $(2p - 3n)(2p + 3n)$.
15. $(a + b)^2 - (a - b)(a + b)$.
16. $(x - 1)(x + 1) - x(x - 3)$.

Разложите на множители (17—20).

17. $a^3 - 4a$.
18. $ax^2 - ay^2$.
19. $3a^2 - 6ab + 3b^2$.
20. $ax^2 + 2ax + a$.

Решите уравнение (21—24).

21. $(x - 12)(3x + 9) = 0$.
22. $(x + 2)^2 = 0$.
23. $x^2 + 7x = 0$.
24. $x^2 - 25 = 0$.

Тест к главе 8

1. Укажите общий множитель, который можно вынести за скобки в многочлене $6xy^2 - 15xy + 12x^2y$.

А. $6xy^2$. **Б.** $6xy$. **В.** $3xy^2$. **Г.** $3xy$.

2. Дан многочлен $8ab - 10ac$. Вынесите за скобки множитель $-2a$.

А. $-2a(4ab - 5ac)$. **В.** $-2a(5c - 4b)$.
Б. $-2a(4b + 5c)$. **Г.** $-2a(5ac - 4ab)$.

3. Сократите дробь $\frac{ax - 2a}{ax}$.

Ответ. ________

4. В каком случае выражение $a(a - y) + x(y - a)$ разложено на множители правильно?

I. $(a - y)(a - x)$. III. $(a - y)(x - a)$.
II. $(y - a)(x - a)$. IV. $(y - a)(a - x)$.

А. Только в I. **Б.** Только в III. **В.** В I и II. **Г.** В III и IV.

5. Какой из одночленов нужно вписать вместо многоточия в многочлен $x^2y - 2xy^2 - 6x$ ..., чтобы его можно было разложить на множители способом группировки?

А. $+12y$. **Б.** $+6y$. **В.** $-2y$. **Г.** $-12y$.

6. Для разложения многочлена $8a^2 - 4a + 2ax - x$ на множители его члены сгруппировали:

I. $(8a^2 - 4a) + (2ax - x)$.
II. $(8a^2 + 2ax) - (4a + x)$.
III. $(8a^2 - x) - (4a - 2ax)$.

Какие из этих способов группировки подходят для того, чтобы выполнить разложение на множители?

А. Только I. **Б.** I и II. **В.** II и III. **Г.** Все три.

7. Разложите на множители многочлен $x^2y - 3xy - xz + 3z$.

Ответ. ________

8. Какое из выражений нельзя разложить на множители, используя формулу разности квадратов?

А. $8x^2 - y^2$. **Б.** $0{,}01a^2 - b^2$. **В.** $9c^4 - 16$. **Г.** $25m^2 - 81n^2$.

9. Разложите на множители $0{,}25x^2y^2 - z^2$.

Ответ. ________

10. Сократите дробь $\frac{4a^2-4a+1}{4a^2-1}$.

А. $\frac{1}{2a+1}$. Б. $\frac{2a-1}{2a+1}$. В. $\frac{1}{4a+1}$. Г. $\frac{4a-1}{4a+1}$.

11. Упростите выражение $(c - 2)(c + 2) - (c - 1)^2$.

А. $2c - 5$. Б. $-2c - 3$. В. -3. Г. -1.

12. Какой двучлен можно разложить на множители, используя формулу суммы кубов?

А. $9x^3 + 27a^3$. Б. $9x^3 - 27a^3$. В. $8x^3 + 27a^3$. Г. $8x^3 - 27a^3$.

13. Закончите разложение на множители: $64m^3 - 1 = (4m - 1)(\ldots)$.

А. $m^2 + m + 1$. В. $16m^2 + 4m + 1$.

Б. $16m^2 + 8m + 1$. Г. $16m^2 - 4m + 1$.

14. Разложите на множители $y^4 - 81$.

Ответ. ________

15. Какой из способов не применяется при разложении на множители многочлена $2a^2 - 2ab - 6a^2 + 6b^2$?

А. Вынесение за скобки общего множителя.
Б. Группировка.
В. Формула разности квадратов.
Г. Формула квадрата разности.

16. Какое из утверждений неверно?

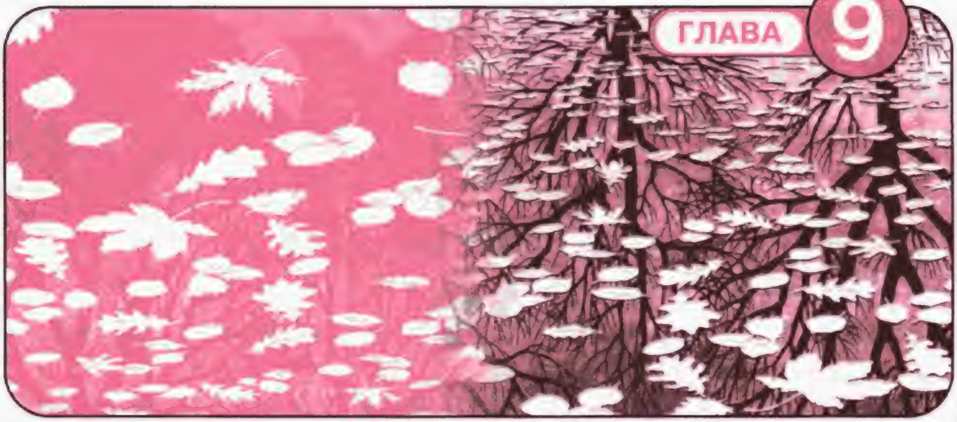
А. Если произведение двух чисел равно нулю, то хотя бы одно из этих чисел равно нулю.
Б. Если хотя бы одно из двух чисел равно нулю, то их произведение равно нулю.
В. Если хотя бы одно из двух чисел не равно нулю, то произведение этих чисел не равно нулю.
Г. Если произведение двух чисел не равно нулю, то ни одно из этих чисел не равно нулю.

17. Решите уравнение $(x - 2)(2x + 6) = 0$.

А. $x = 2$. Б. $x = -3$. В. $x = 2$, $x = -3$. Г. $x = -2$, $x = 3$.

18. Найдите корни уравнения $x^3 - 9x = 0$.

Ответ. ________



Частота и вероятность

9.1 Относительная частота случайного события

Вы уже проводили эксперименты, результаты которых заранее предсказать нельзя. Это подбрасывание монеты, кнопки, раскрытие книги наугад. В каждом таком эксперименте результат зависит от случая, поэтому их называют **экспериментами со случайными исходами** или просто **случайными экспериментами**.

Важно, что такие случайные эксперименты можно многократно повторять в одних и тех же условиях. Обычно многократные случайные эксперименты проводят, чтобы определить, насколько часто появляется интересующий нас результат. Например, как часто при подбрасывании монеты выпадает орел или при одновременном подбрасывании двух кубиков выпадает двенадцать очков. Для этого по результатам серии экспериментов вычисляют **относительную частоту** наблюдаемого события.

> Относительной частотой случайного события в серии экспериментов называют отношение числа экспериментов, в которых это событие произошло, к общему числу экспериментов.

Относительная частота показывает, какую часть от общего числа проведенных экспериментов составляют эксперименты, завершившиеся интересующим нас результатом.

Пусть в серии из N экспериментов интересующее нас событие произошло n раз, тогда его относительная частота равна $\frac{n}{N}$. Поскольку $0 \leqslant n \leqslant N$, то относительная частота выражается числом

от 0 до 1. Если событие не произошло ни разу, т. е. $n = 0$, то его относительная частота в серии экспериментов равна 0. Если оно происходило каждый раз, то его относительная частота равна 1. Относительную частоту принято выражать в процентах.

При определении относительной частоты случайного события результаты удобно сводить в таблицу.

■ **Пример.** В классе проводилась серия экспериментов по подбрасыванию кнопки. Ученики разбились на пары, каждая из которых 100 раз подбросила кнопку. Перед вами таблица результатов, полученных одной из пар:

Событие	Подсчеты	Всего
Острие вниз	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ////	44
Острие вверх	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 /	56
		100

Из таблицы видно, что относительная частота падения кнопки острием вниз в этой серии экспериментов равна 0,44, а относительная частота падения кнопки острием вверх равна 0,56.

Такие серии по 100 экспериментов в классе провели 10 пар учеников. Каждая пара получила свою таблицу результатов. Поскольку все кнопки из одной коробки можно считать одинаковыми, они свели результаты в одну общую таблицу. В первый столбец таблицы внесли результаты экспериментов, проведенных одной парой учеников. Далее каждый раз, заполняя следующий столбец таблицы, к результатам предыдущего столбца прибавляли результаты, полученные следующей парой учеников, и затем подсчитывали соответствующие относительные частоты.

Число экспериментов		100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Острие вниз	Всего событий	44	94	130	173	221	265	310	356	403	448
	Относительная частота	0,44	0,47	0,43	0,43	0,44	0,44	0,44	0,45	0,45	0,45
Острие вверх	Всего событий	56	106	170	227	279	235	390	444	497	552
	Относительная частота	0,56	0,53	0,57	0,57	0,56	0,56	0,56	0,55	0,55	0,55

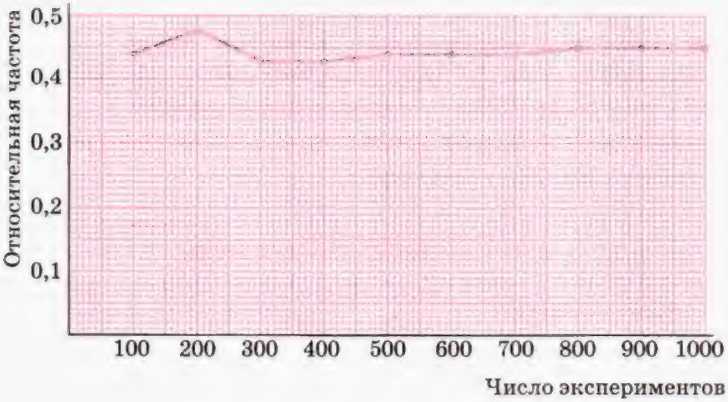


Рис. 9.1

Из таблицы видно, что при увеличении числа экспериментов относительная частота каждого события выравнивается, или, как говорят, *стабилизируется*. Относительная частота события «острие вниз» стабилизируется около числа 0,45, а относительная частота события «острие вверх» — около числа 0,55. Значит, шансы падения кнопки острием вниз несколько меньше, чем острием вверх.

Стабилизация частоты будет нагляднее, если данные таблицы представить графически. На рисунке 9.1 построен график зависимости относительной частоты результата «острие вниз» от числа экспериментов. Для этого каждая пара чисел (число экспериментов, относительная частота) отмечена точкой на координатной плоскости. Полученные точки соединены ломаной, которая при увеличении числа экспериментов становится практически горизонтальной прямой.

Отметим, что к экспериментам со случайными исходами относят не только эксперименты, которые мы проводим сами, но и самые разные опыты, испытания, проведенные кем-то другим, а также наблюдения за явлениями природы, если мы при этом можем зафиксировать их результаты. Конечно, и в этих наблюдаемых экспериментах существенно, чтобы условия, в которых они происходят, каждый раз были примерно одними и теми же.

Случайными исходами таких испытаний являются, например, количество петухов и количество куриц, вылупляющихся из каждой сотни яиц, температура воздуха в один и тот же день в одном и том же месте, итоги еженедельной лотереи, результаты стрельбы по мишени, уровень весеннего разлива реки. Относительные частоты соответствующих событий позволяют строить обоснованные прогнозы для решения задач, возникающих в жизни.

А

943. Игральный кубик подбросили 200 раз, при этом 28 раз выпало шесть очков. Найдите относительную частоту события «выпало шесть очков». (Ответ выразите в процентах.)

944. За лето на Черноморском побережье было 67 солнечных дней. Какова относительная частота солнечных дней на побережье за лето? пасмурных дней? (Используйте калькулятор.)

945. В марте в городе родилось 2348 мальчиков и 2027 девочек. Найдите относительную частоту рождения мальчиков и рождения девочек в этом месяце. (Используйте калькулятор.)

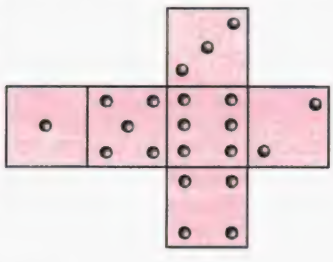
946. Используя данные таблицы на с. 237, представьте графически зависимость относительной частоты появления результата «острие вверх» от числа проведенных экспериментов.

947. Проведите 150 экспериментов по подбрасыванию обычной металлической крышки от бутылки. Каждый из экспериментов может завершиться одним из двух возможных исходов: крышка упадет вверх дном или вверх зубцами. Полученные результаты оформите в виде таблицы.

Событие	Подсчеты	Всего
A: 		
B: 		
		150

1) Подсчитайте относительную частоту события A и события B.
2) Пусть двое играют, подбрасывая такую крышку. Один выигрывает при появлении события A, а другой — при появлении события B. Используя полученные статистические данные, определите, справедлива ли эта игра. Что нужно сделать, чтобы ваш вывод был более обоснованным?

948. Проведите 50 экспериментов по подбрасыванию игрального кубика (рис. 9.2). Каждый из этих экспериментов может завершиться одним из шести возможных исходов: выпадет 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков.
1) Полученные результаты оформите в виде таблицы.
2) Сведите все результаты, полученные в классе, в одну общую таблицу.



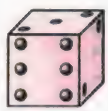


Рис. 9.2

3) Вычислите относительную частоту каждого исхода.

4) Как вы считаете, справедливо ли использование кубика в настольных играх?

Б

949. Подсчитано, что относительная частота получения неудовлетворительной оценки на школьном экзамене в городе N равна 0,07. Известно, что в этом городе 100 человек не сдали экзамен.

а) Найдите примерное число школьников, сдававших экзамен.

б) Найдите примерное число школьников, сдавших экзамен успешно.

950. Многолетняя проверка показала, что всхожесть семян огурцов определенного сорта составляет 90%. Посеяли 200 семян. Какое число проросших семян следует ожидать?

951. Подсчитано, что частота появления «зайца» в электропоездах составляет 10%. Известно, что за день 5400 пассажиров купили в кассе билеты. Сколько примерно «зайцев» ехало за день в электропоездах?

952. Эксперименты состоят в одновременном подбрасывании двух игральных кубиков с вычислением каждый раз суммы выпавших на кубиках очков.

1) Какая наименьшая и какая наибольшая сумма очков может при этом получиться?

2) Укажите все возможные исходы случайного эксперимента.

3) Проведите 50 экспериментов и внесите результаты в таблицу.

4) Сведите все результаты, полученные в классе, в общую таблицу. В первой строке этой таблицы укажите все возможные исходы, во второй — сколько всего экспериментов завершилось данным исходом, а в третьей — относительную частоту этого исхода.

5) Постройте столбчатую диаграмму относительных частот, отмечая на горизонтальной оси исходы, а на вертикальной — их частоты.

6) Первый игрок выигрывает, если выпадает 4 очка, второй — если выпадает 8 очков, третий — если выпадает 12 очков. В остальных случаях проводится новый эксперимент, т. е. кубики бросают снова. Исходя из статистических данных, полученных в результате экспериментов, определите, справедлива ли такая игра. Если нет, то у кого из игроков наибольшие шансы выиграть?

9.2 Вероятность случайного события

Кто из двух шахматистов будет играть белыми? Какая из двух футбольных команд начнет игру? Чтобы решать такие вопросы по справедливости, принято подбрасывать монету. Этот обычай связан с предположением о том, что орел и решка выпадают примерно с равной частотой. Это предположение подвергали экспериментальной проверке ученые разных стран и эпох.

В XVIII в. французский естествоиспытатель Жорж Луи де Бюффон не поленился провести 4040 экспериментов с подбрасыванием монеты, при этом орел выпал 2048 раз, т. е. у Бюффона относительная частота появления орла получилась равной $\frac{2048}{4040} \approx 0{,}5069$.

В начале XX в. английский математик Карл Пирсон провел уже 24 000 экспериментов, при этом орел выпал 12 012 раз. Значит, у Пирсона частота появления орла получилась равной $\frac{12\,012}{24\,000} \approx 0{,}5005$.

В следующей таблице помещены результаты, полученные разными исследователями начиная с XVIII в.:

Исследователь	Число экспериментов	Относительная частота выпадания орла
Бюффон	4040	0,5069
Де Морган	4092	0,5005
Джевонс	20 480	0,5068
Романовский	80 640	0,4923
Феллер	10 000	0,4979
Пирсон	24 000	0,5005

Нетрудно заметить, что серии экспериментов, проведенные в разные эпохи и в разных странах, дают похожий результат: при многократном подбрасывании монеты относительная частота выпадания орла стабилизируется около числа 0,5. Говорят, что **вероятность** выпадания орла равна 0,5. Это число выражает шансы появления события «выпал орел» при многократном проведении экспериментов. Так как во всех этих сериях экспериментов решка появлялась также примерно в половине случаев, то и вероятность выпадания решки равна 0,5. Вообще вероятность и частота случайного события связаны между собой. *Если случайный эксперимент повторять достаточно много раз, то частота интересующего нас события будет близка к его вероятности.*

Вероятность события обозначается большой латинской буквой P (от французского слова *probabilite*, что означает «вероятность»). Если

обозначить событие «выпадет орел» буквой A, а событие «выпадет решка» буквой B, то полученный результат можно записать так:

$$P(A) = 0{,}5,\ P(B) = 0{,}5.$$

Иногда вероятность выражают в процентах:

$$P(A) = 50\%,\ P(B) = 50\%.$$

Тот факт, что вероятность появления орла равна 0,5, конечно, не означает, что если вы несколько раз будете бросать монету, то орел появится ровно в половине случаев. Но если число экспериментов достаточно велико, мы можем сделать прогноз, что орел выпадет *примерно* в половине случаев. Вообще *по вероятности события можно прогнозировать относительную частоту появления этого события в будущем.*

В случае с подбрасыванием монеты и не проводя экспериментов естественно предположить, что вероятность выпадания каждой стороны монеты равна 0,5. Но во многих ситуациях без проведения многократных экспериментов предсказать вероятность случайного события практически невозможно. Например, если монету заменить на кнопку. В таких случаях оценить вероятность случайного события можно только по его относительной частоте, которая определяется в ходе выполнения многократных экспериментов. При этом чем больше проведено экспериментов, тем точнее можно оценить вероятность события. Так, при проведении большого числа экспериментов с кнопкой относительная частота появления случайного события «острие вниз» стабилизируется около числа 0,45. Значит, вероятность выпадания кнопки острием вниз примерно равна 0,45.

Понятно, что вероятность случайного события — это число, заключенное между 0 и 1. Если событие является достоверным, т. е. если оно обязательно происходит при каждом повторении эксперимента, то его относительная частота равна 1, и естественно считать, что и его вероятность равна 1. Невозможное событие не происходит ни при каком повторении эксперимента, поэтому вероятность невозможного события считают равной 0.

Если случайное событие обозначить буквой A, то можно записать, что $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. Этому факту можно дать геометрическое истолкование с помощью *вероятностной шкалы* (рис. 9.3).

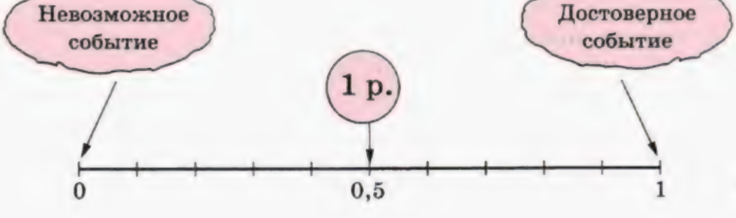


Рис. 9.3

А

953. По статистике на каждые 1000 лампочек приходится 3 бракованные. Какова вероятность купить исправную лампочку?

954. В таблице приведены данные о продаже фирмой автомобилей за прошлый год.

Марки	A	B	C	D	E
Продано штук	132	787	424	108	320

а) Оцените вероятность того, что произвольный покупатель выберет в этом году машину марки B. Ответ округлите до сотых.
б) Автомобили марок A, B, C — отечественные, D и E — иностранные. Оцените вероятность того, что произвольный покупатель выберет отечественный автомобиль. (Используйте калькулятор.)

955. Оцените вероятность каждого из возможных исходов случайных экспериментов, предложенных в задаче **947**.

956. Демографы утверждают, что вероятность рождения близнецов приблизительно равна 0,012. В скольких случаях из 10 000 рождений можно ожидать появления близнецов?

957. Если вероятность события A составляет 30%, то можно ли утверждать, что при проведении 900 соответствующих случайных экспериментов событие A наступит ровно в 270 из них?

958. Человек купил две батарейки, одна из которых оказалась неисправной. Можно ли исходя из этого с уверенностью утверждать, что вероятность купить неисправную батарейку равна 0,5?

959. При проведении 1000 случайных экспериментов событие A произошло в 998 случаях. Является ли оно достоверным? Дайте словесные характеристики события A.

960. Используя полученные статистические данные, расположите на вероятностной шкале случайное событие:

а) A: кнопка выпадет острием вверх;
б) B: кнопка выпадет острием вниз;
в) C: при подбрасывании монеты выпадет орел.

961. Где на вероятностной шкале расположены маловероятные события? очень вероятные события? практически невероятные события?

962. Используя статистические данные, полученные при решении задачи **948**, оцените:

а) вероятность выпадения четного числа очков;

б) вероятность того, что выпадет не больше 4 очков;

в) вероятность того, что число выпавших очков не равно 3.

963. Из пруда было выловлено 90 рыб, которых пометили и выпустили обратно в пруд. Через неделю из пруда выловили 84 рыбы, из которых 5 оказались помеченными. Сколько примерно рыб в пруду?

964. Пусть требуется оценить вероятность исходов по подбрасыванию следующих предметов: монеты, пуговицы, кубика. В каких случаях вы готовы дать ответ, не проводя экспериментов?

9.3 Сложение вероятностей

(Для тех, кому интересно)

Ученик, используя полученные знания в области теории вероятностей, решил сделать прогноз своей успеваемости по математике, изучив свои отметки за 5—7 классы. Результаты его исследования представлены в таблице.

Отметка	Количество отметок	Примерная вероятность получения отметки
5 (отлично)	39	0,21
4 (хорошо)	78	0,41
3 (удовлетворительно)	63	0,34
2 (неудовлетворительно)	8	0,04

Какова вероятность того, что очередной ответ ученика будет оценен на «4» или «5»?

Если считать, что все эти годы он учился примерно одинаково, и не учитывать особые обстоятельства, такие, как сложность данной темы, состояние здоровья и т. д., то на этот вопрос ответить нетрудно.

Всего ученик получил 188 отметок, из них ответов на «4» и «5» было $39 + 78$, значит, вероятность можно оценить как

$$\frac{39+78}{188} = \frac{39}{188} + \frac{78}{188} \approx 0{,}21 + 0{,}41 = 0{,}62.$$

Мы видим, что для ученика вероятность получить «хорошо» или «отлично» равна сумме вероятностей двух событий: получить «хорошо» и получить «отлично». Вообще

> вероятность получить хотя бы один (неважно, какой именно) из нескольких интересующих нас результатов эксперимента равна сумме вероятностей каждого из этих результатов, если эти результаты несовместимы между собой.

Это правило называется **правилом сложения вероятностей**.

Но что означает, что результаты **несовместимы** между собой? *Несовместимыми называют такие события, которые в рассматриваемом эксперименте не могут произойти одновременно.*

В приведенном рассуждении очень важно, что получение оценок «4» и «5» одним и тем же учеником за один и тот же ответ — несовместимые события.

Если случайные события совместимы, т. е. могут произойти одновременно, правило сложения вероятностей применять нельзя. В таких случаях используют иные, более сложные законы, с которыми вы познакомитесь в старших классах.

965. Укажите, совместимы события A и B или нет:

а) A: к остановке подошел автобус № 3.
B: к остановке подошел автобус № 5.

б) A: идет дождь.
B: идут два студента.

в) A: студент идет в пальто.
B: студент идет в университет.

г) A: в футбольном матче Россия — Бразилия победит Россия.
B: в том же футбольном матче Россия — Бразилия победит Бразилия.

966. В лотерее выпущено 100 000 билетов и установлены: 1 выигрыш в 100 000 р., 10 выигрышей по 10 000 р., 100 выигрышей по 1000 р., 1000 выигрышей по 100 р. и 5000 выигрышей по 50 р. Человек купил один лотерейный билет.

а) Какова вероятность того, что он выиграет не меньше 1000 р.?

б) Какова вероятность того, что он выиграет?

в) Какова вероятность того, что он проиграет?

ДЗ Дополнительные задания к главе 9

Относительная частота и вероятность

967. Игральный кубик подбросили 100 раз. Результаты экспериментов занесли в таблицу.

Количество выпавших очков	Число наступлений события	Относительная частота, %
1	18	
2	12	
3	16	
4	22	
5	18	
6	14	

1) Заполните последний столбец таблицы.
2) Найдите относительную частоту следующих событий:
A: выпало четное число очков;
B: выпало нечетное число очков;
C: выпало число очков, большее трех.

968. Два кубика подбросили 10 раз, при этом событие «выпало 12 очков» не произошло ни разу. Можно ли утверждать, что вероятность этого события равна нулю?

969. Какое из следующих событий вам кажется более вероятным:
A: при двух бросаниях монеты 1 раз выпал орел и 1 раз решка;
B: при двадцати бросаниях монеты 10 раз выпал орел и 10 раз решка?

970. Бросают два игральных кубика. Среди приведенных ниже событий укажите те, вероятность которых равна 0 и вероятность которых равна 1:
A: сумма выпавших очков равна 1;
B: сумма выпавших очков больше 1;
C: сумма выпавших очков не больше 12;
D: произведение выпавших очков больше 40.

971. Какова вероятность того, что в классе, где учится 25 человек:
а) хотя бы двое родились в одном месяце;
б) хотя бы трое родились в одном месяце?

972. Известно, что среди 1000 выпущенных лотерейных билетов 100 выигрышных. Какое наименьшее количество лотерейных билетов надо купить, чтобы выиграть с вероятностью, равной 1?

Вопросы для повторения к главе 9

1. Какие эксперименты называют экспериментами со случайными исходами? Приведите примеры.

2. Что называется относительной частотой случайного события?

3. Как оценить вероятность случайного события? В каких границах находится вероятность случайного события? Вероятность какого события равна 1? равна 0?

Задания для самопроверки к главе 9

(Обязательные результаты обучения)

1. Баскетболист на тренировке учился бросать мяч в кольцо. Выполнив 50 бросков, он попал в кольцо 36 раз. Какова была относительная частота попаданий в кольцо на тренировке?

2. В магазине подсчитали, что на каждую 1000 проданных телефонов приходится 6 неисправных. Какова вероятность того, что купленный телефон будет исправен?

3. Перебрав цветки подаренной ей ветки сирени, девушка обнаружила три пятилепестковых цветка. Сколько примерно цветков на этой ветке, если известно, что вероятность того, что в выбранном наугад цветке сирени пять лепестков, равна 0,01?

Тест к главе 9

1. Относительной частотой случайного события в серии экспериментов называют:

   А. Число экспериментов, в которых это событие произошло.

   Б. Разность общего числа проведенных экспериментов и числа экспериментов, в которых это событие произошло.

   В. Отношение числа экспериментов, в которых это событие произошло, к общему числу проведенных экспериментов.

   Г. Отношение общего числа проведенных экспериментов к числу экспериментов, в которых это событие произошло.

2. Ваня в течение года получил 52 отметки по алгебре, из них 13 отметок — пятерки. Какова относительная частота события «Ваня получил пятерку по алгебре»?

А. 0,4. **Б.** 0,25. **В.** 0,75. **Г.** 0,13.

3. Игральный кубик подбросили 500 раз. Результаты представлены в таблице:

Количество выпавших очков	1	2	3	4	5	6
Число наступлений события	74	81	90	85	91	79

Какова частота наступления события «выпало не менее пяти очков»? Ответ дайте в процентах.

Ответ. ____________

4. Каким числом не может выражаться относительная частота случайного события?

А. 0. **Б.** 0,5. **В.** 1. **Г.** 1,5.

5. Прошлой зимой в городе Оладьино относительная частота простудных заболеваний составила 12%. Сколько человек заболело, если в городе проживает 60 тыс. человек?

А. 1200. **Б.** 5000. **В.** 7000. **Г.** 7200.

6. По статистике на каждые 10 000 батареек приходится 6 неисправных. Какова вероятность купить неисправную батарейку?

А. 6%. **Б.** 0,6%. **В.** 0,06%. **Г.** 0,006%.

7. Среди данных событий укажите то, вероятность которого составляет 50%.

А. При бросании кнопки она упадет на острие.

Б. При бросании игрального кубика выпадет 6 очков.

В. При бросании монеты выпадет орел.

Г. При бросании металлической крышки от бутылки она упадет зубцами вверх.

Ответы

ГЛАВА 1

7. $\frac{12}{25}$ — наименьшая, $\frac{21}{40}$ — наибольшая. **16.** 56 дробей; $\frac{11}{37}$ — наименьшее число, $\frac{37}{11}$ — наибольшее число; восемь. **17.** Ответ В. **18.** а) $1 \leqslant x \leqslant 4$, $x \in N$; б) $x \geqslant 4$, $x \in N$; в) $6 \leqslant x \leqslant 49$, $x \in N$; г) $1 \leqslant x \leqslant 39$, $x \in N$. **19.** Утверждения 1 и 4. **23.** а) $1\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $2\frac{5}{11}$; г) 0,027. **24.** а) $\frac{1}{70}$; б) $1\frac{1}{3}$; в) $9\frac{1}{11}$; г) $\frac{11}{35}$. **25.** а) 0,5; б) $3\frac{1}{3}$; в) $11\frac{3}{7}$; г) 0,02. **28.** а) −0,4; в) 0,48. **30.** а) −0,32; б) $\frac{3}{7}$; в) 0,6; г) $-\frac{1}{9}$. **31.** в) 1,5; г) −0,25. **33.** а) 3; б) −3. **35.** Ответ В. **46.** б) a^{11}; a^{19}; a^{m+n}; a^{x+y+1}. **48.** Получатся выражения: $(30 : 5) - 10^3$, $(30 : 5 - 10)^3$, $30 : (5-10)^3$, $30 : (5-10^3)$. **49.** б) −2,42; г) −20,1; д) −19; е) 1,6. **52.** Ответ В. **56.** а) 533 см^3; б) 1,3 м^3. **60.** 1 см = 10^{-2}м; 1 мм = 10^{-3}м; 1 мк = 10^{-6}м. **64.** Ответ В. **67.** $n=4$; $n=7$; $n=10$; $n=14$; $n=17$; $n=20$. **69.** Первым способом — 2500 р., вторым способом — примерно 321 тыс. р. **70.** 6,4 мм. **71.** 3) $\frac{1023}{1024}$. **75.** а) 15 000 р.; б) 17 500 р. **76.** а) 48 упаковок; б) 34 учащихся. **77.** а) Можно; б) будет. **78.** б) 160 мест. **79.** б) 4 кг. **81.** б) 595 кВт · ч. **82.** Ответ В. **84.** б) Неверный; цена повысилась почти на 56%. **86.** а) 200 детей; б) 200 пассажиров. **87.** 60 кг. **88.** а) 11%; б) 14%. **89.** а) 26%; б) 27%. **91.** а) 42% всего пути; б) 40% бака. **92.** а) 22%; б) 10,4%. **93.** б) на 25%; в) на $16\frac{2}{3}$%; г) на $9\frac{1}{11}$%. **99.** Средняя посещаемость 16 000 человек. **103.** 3,3; 4. **104.** 4; 3,7. **105.** 1,2; 1. **107.** а) 5,4; 8; б) 6,5 тыс. книг. **110.** 3^{10} — цифрой 9, 3^{15} — цифрой 7, 3^{120} — цифрой 1, 3^{126} — цифрой 9. **112.** Ответ В. **114.** Например, 6, 46, 5, 15, 21. **115.** Числа m и n или оба четные, или оба нечетные. **116.** Все три числа делятся на 10. **120.** а) $2\frac{1}{6}$; б) $\frac{4}{21}$. **121.** а) −1,45; б) −1,25. **122.** а) −7,3; б) 1,25. **123.** а) 4,8; б) 9,6. **126.** а) $-0{,}11 < (-0{,}11)^3 < (-0{,}11)^4 < (-0{,}11)^2$. **127.** а) 1,6 кг; б) 6,25 кг. **128.** б) На 20 000 р. **129.** 840 спортсменов. **130.** 140 р. **131.** 17 игр. **133.** 60 кг. **134.** 750 мест. **135.** 20 кг. **137.** 11,5%. **141.** а) 40; б) $x = 15$. **142.** а) 6; б) 3. **143.** 14,5.

Тест к главе 1. **1.** В. **2.** Б. **3.** $\frac{1}{6}$. **4.** Б. **5.** 9,9. **6.** Г. **7.** А. **8.** −0,27. **9.** В. **10.** А. **11.** 1) — в); 2) — а); 3) — г); 4) — б). **12.** Б. **13.** В. **14.** В. **15.** А. **16.** В.

ГЛАВА 2

146. а) $V \approx 25{,}2$ см^3; $V \approx 201{,}6$ см^3; б) $S = 286$ см^2; в) $V = 3500$ см^3. **149.** а) За 45 с; б) 50 км/ч. **153.** $S = 0{,}33t$. **154.** $v = \frac{ln}{t}$; 5 км/ч. **155.** $N = 5 + 16(n - 1)$; 229 ступенек. **156.** На 20 км/ч. **172.** б) 8 компакт-дисков. **173.** б) За 20 с. **176.** а) 444 страницы; б) 270 г. **177.** а) 15 дней; б) 60 мин. **178.** На 33 %. **179.** На 20%. **180.** а) Увеличились в 1,8 раза; б) увеличились в 1,2 раза; в) уменьшатся в 2,5 раза. **188.** а) 9,4 см; б) 3,2 см. **191.** **Ответ** Г. **194.** г) $x = 4$, $x = -4$. **196.** а) $A_1B_1 = 1{,}8$ см; $D_1E_1 = 1{,}2$ см; $BC = 3$ см; $CD = 4$ см; в) $P : P_1 = 5 : 3$. **197.** б) На 10 км/ч. **198.** 60 г; 180 г. **199.** Через 2,1 ч. **200.** а) 6 рабочих; б) 1 трубу. **201.** а) 90 страниц, 240 страниц; б) 6 км. **206.** б) $\frac{xa}{a+b+c}, \frac{xb}{a+b+c}, \frac{xc}{a+b+c}$. **207.** 1000 р., 1500 р. и 2000 р. **208.** Шалфей — 20%, ромашка — 50%, валериана — 30%. **209.** 40%, 26%, 34%. **212.** 50 г, 100 г и 200 г. **213.** 20 000 р., 10 000 р. и 2000 р. **215.** $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $AC = 7{,}5$ см. **216.** 6000 р., 4000 р., 2400 р. **218.** За 12,5 ч. **220.** На 6 человек. **223.** $x : y = 4 : 5$. **224.** $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$. **228.** 4 ч 30 мин. **229.** За 30 мин. **231.** а) 252 ученика; б) 64, 80, 72 и 72 учащихся. **232.** 5,5 см. **233.** Медь — 16%, олово — 60%, сурьма — 24%; 2 кг. **234.** 168, 224 и 196 тетрадей.

Тест к главе 2. **1.** 62,8 см^2. **2.** Б. **3.** Г. **4.** 72 км/ч. **5.** Г. **6.** 0,4 расстояния. **7.** В. **8.** А. **9.** В. **10.** Б. **11.** А. **12.** 16,8 см.

ГЛАВА 3

246. $a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$. **268.** а) $\frac{5}{9}M$; б) $0{,}16x$. **271.** а) $-\frac{1}{y}$; д) $\frac{1}{2a}$; е) $-\frac{b}{2}$; з) $-\frac{3m}{4n^2}$; и) $-\frac{4a}{3d}$. **275.** $15n + 105$. **276.** а) $5a + 20$; б) $10a + 90$. **277.** а) $6a^3b^5$; в) a^3c^2; д) $-x^3z^2$; е) a^3b^4. **281.** а) $S = ab - 3cd$; б) $S = ab - 6cd$. **287.** в) $3n$; г) $5n$. **289.** а) $3x - 2$. **295.** б) $2b - 1\frac{1}{2}$; в) $m^2 + 1$; г) 3. **297.** а) $b - a - 2$; б) $2m$. **299.** б) $2x + 3$; в) $a - 10$. **302.** $N + 9$. **303.** а) $A + 18$; б) $A + 15$. **309.** г) $-\frac{1}{3}$; д) 0; е) $-0{,}5$. **310.** д) $2bc - abc$; е) $1 - 13z$. **311.** а) $y - x$; б) $-2xyz$. **312.** а) 2,8; б) 2,4. **318.** а) $7n - 5$. **319.** а) $4a + 2$ км; б) $120n + 240$ с. **323.** б) $2(k - a) - (k - a) = k - a$; г) $ab + (1 - a)b + 1 = b + 1$. **324.** в) $3 - 2m$; г) $2c - b$. **325.** $3{,}42n$ р. **326.** Увеличилась на 20%. **327.** $5a - 40t$ км. **339.** б) $\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z$; в) $-0{,}5a$; г) $\frac{1}{4}b + 1$. **340.** а) $-6{,}2$; $-13{,}7$; б) $-\frac{1}{3}$; 0,8; в) $-0{,}1$; 0,1. **346.** $5{,}5x + 1{,}5$ м. **347.** $8n - 84$.

Тест к главе 3. **1.** В. **2.** Б. **3.** А. **4.** А. **6.** Г. **7.** $6x^2yz$. **8.** $\frac{n}{2}$. **9.** $9mn$. **10.** Г. **11.** В. **12.** В. **13.** $2yz - xy$. **14.** $a - 4$. **15.** А. **16.** $150 - 18n$.

ГЛАВА 4

359. Пусть некто имел x рупий. Получим уравнение $\frac{x+100}{2} + 100 + 10 = 6(x-10)$. **372.** д) -12; е) -25; ж) 2; з) 0; и) 1; л) 32. **373.** г) 9; ж) $3\frac{1}{3}$; з) 20; м) 0,5. **377.** в) $-12{,}5$; г) -1; д) 2; е) 40. **380.** г) 7; д) -6; е) 25. **381.** б) 24; г) 5; е) -5; з) -110. **382.** д) 42; е) -18; ж) 10; з) 32. **385.** а) $x = 7$; б) $x = 3$. **387.** а) $-1\frac{1}{3}$; б) 4; в) -120; г) $-1{,}6$; д) $-3{,}6$; е) 0. **390.** 13,5. **396.** 144, 48 и 12 гульденов. **400.** а) 48 и 60; б) 54 и 120. **402.** б) за 4 ч. **404.** 6 км. **405.** 2,4 км. **406.** 150 км. **408.** 1 км. **409.** 48 км. **411.** 6 кг. **412.** 15 кг. **415.** б) 4,5 кг, 3 кг, 3,5 кг и 3,5 кг. **416.** а) 2 ч; б) 10 км. **417.** а) 3 и 5 м; б) 120 м. **418.** а) 5,5 и 4,4 м; б) 4,5 и 5,4 м. **419.** б) 100 р. **422.** 36 гусей. **423.** 28 учеников. **424.** 10 верст. **425.** 1,75 р. **427.** а) -7 и 5; б) -3 и 2. **428.** -3 и 4. **429.** 2. Указание. Нужно перебрать все натуральные делители числа 6, исключая 1. **431.** 8. Пусть x — число участников турнира, получим уравнение $x(x-1) = 56$. **435.** а) -1; б) 2. **436.** а) 15; в) -36. **437.** а) 4; б) 2,4. **438.** а) Да; $x = 0$; б) нет. **441.** На мячи — по 950 р.; на скакалки — 380 р. **442.** 160 р. и 184 р. **444.** 10 друзей; мяч стоит 240 р. **445.** 0,75 кг и 0,25 кг. **446.** 8 лет. **447.** а) Антону 11 лет, брату 15 лет; б) Ольге 28 лет, мужу 36 лет, сыну 7 лет, дочери 2 года. **448.** а) 30 лет и 10 лет; б) 27 лет и 3 года.

Тест к главе 4. 1. В. **3.** 25. **4.** $-5{,}5$. **5.** Б. **6.** Г. **7.** А. **8.** 300 р. **9.** В. **10.** В. **11.** Б. **12.** Б.

ГЛАВА 5

466. б) $\frac{1}{6}$; в) 0,07. **467.** $D(-7; 6)$; $P = 64$. **468.** а) -5 или 3; б) -4 или 8. **469.** а) 2,8; б) 1,5; 7; 12,5. **478.** $a = -1$. **482.** д) $-2 \leqslant x \leqslant 0$ и $-2 \leqslant y \leqslant 0$; е) $-2 \leqslant x \leqslant 2$ и $-1 \leqslant y \leqslant 1$. **484.** а) $x \leqslant 1$ и $y \leqslant 0$; б) $x \leqslant -1$ и $y \geqslant 0$. **487.** б) Прямая $x = -1$. **488.** $-5 \leqslant y \leqslant -2$. **495.** а) $y = \frac{1}{2}x$; б) $y = x + 1$. **496.** $y = -\frac{1}{2}x$. **498.** Указание. Из равенства $y^2 = x^2$ следует, что $y = x$ или $y = -x$. **513.** $y = -x^2$. **517.** г) Через 30 мин и через 3 ч; д) 2,5 км/ч — на подъеме; 6 км/ч — на спуске. **518.** б) 60 км/ч; в) в третьем рейсе. **519.** в) За июль тираж вырос примерно на 500%; за осень — примерно на 23%; г) самый быстрый рост — в июле; самый медленный — в декабре. **520.** г) 5 ч, 20 км, 4 км/ч; д) Андрей. **523.** б) Там, где одна кривая «идет вверх», другая «опускается вниз» и наоборот. **524.** Указание. Данные условия можно записать так:
а) $y = \begin{cases} 0, \text{ если } x \geqslant 0 \\ -2x, \text{ если } x < 0; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} 1, \text{ если } x \geqslant 0 \\ -1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$ **528.** а) $x \geqslant \frac{1}{2}$; б) $x \leqslant 0$. **530.** а) $x \geqslant -2$ и $-1 \leqslant y \leqslant 4$; б) $-3 \leqslant x \leqslant 3$ и $y \leqslant 5$. **531.** а) $-3 \leqslant x \leqslant -1$ и $1 \leqslant y \leqslant 2$; б) $1 \leqslant x \leqslant 3$ и $-2 \leqslant y \leqslant -1$. **532.** а) $|x| \leqslant 2$ и $|y| \geqslant 3$; б) $|x| \geqslant 2$ и $|y| \geqslant 3$.

Тест к главе 5. 1. 1) — в); 2) — б); 3) — г); 4) — а); **2.** В. **3.** $M(1)$. **4.** 1) — в); 2) — а); 3) — б). **5.** А. **6.** Г. **7.** 1) — б); 2) — в); 3) — а); 4) — г). **8.** 1) — д); 2) — в); 3) — а); 4) — б); 5) — г). **9.** А.

ГЛАВА 6

540. в) 5^{n+3}; г) 2^{2n+1}; д) 7^{2k+2}; е) 10^{3n}. **541.** а) $-x^3$; б) x^3; в) x^3; г) $-x^4$; д) $-x^4$; е) x^4. **548.** а) a^{n-2}; б) x^n; в) x; г) x^{n-1}. **550.** в) 25; г) 100. **553.** в) 1600; г) 2000. **555.** д) $-4m^4n^4$; е) $-2c^5d^2$; ж) $-24a^6b^5$; з) x^4y^3. **556.** б) $3{,}2a^4b^4c^4$; г) $-ac^6d^2$; е) x^2y^3. **561.** а) 25; б) 2; в) $\frac{9}{4}$. **564.** а) y^2; б) y^{k+2}; в) y^{5k+1}; г) y^{2k}. **567.** а) x^{n+10}; б) a^2; в) c^{3n}; г) y. **568.** а) 2^4; 2^6; 2^{n+1}; 2^{2n}; б) 3^5; 3^7; 3^{n+1}; 3^{2n}. **569.** а) 1,25; б) $1\frac{1}{9}$. **576.** а) x^{mn}; x^{n^2}; x^{2n}; б) x^{14}; x^{4n}; x^{3n+9}. **583.** б) $-x^6$; в) x^6; г) $-x^6$. **587.** а) 125; б) 64; в) 16; г) 0,2; д) 64; е) 3; ж) $\frac{1}{8}$; з) $\frac{1}{16}$. **589.** в) $4m^6n^8$; г) $4y^5z^6$; е) $-a^2c^7$. **590.** б) $3x$; г) $-\frac{c^4}{16a^2}$; д) $-\frac{c^3}{3a^3}$; е) $\frac{1}{x^3y^5}$. **592.** а) 1; б) $\frac{1}{8}$; в) 3; г) 1. **593.** а) $\frac{1}{25}$; б) 1,5; в) 75; г) 125. **594.** а) 1; б) $\frac{1}{8}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{2}{3}$. **596.** а) $5^{20} < 55^{10}$; б) $33^{15} > 3^{30}$; в) $10^{30} < 1010^{10}$; г) $10\,001^5 > 99^{10}$. **600.** б) $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$. **601.** а) $6 \cdot 5 = 30$; б) $101 \cdot 100 = 10\,100$. **602.** а) $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$; б) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$. **603.** $5^4 = 625$; $4 \cdot 5^3 = 500$; $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$. **604.** $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 45\,000$; $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 18\,000$; 9000. **605.** а) $\frac{39 \cdot 40}{2} = 780$; б) $\frac{49 \cdot 50}{2} = 1225$. **606.** $20 \cdot 19 = 380$. **607.** $2^5 = 32$. **608.** $2^8 = 256$. **609.** $4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4! = 60$. **610.** $26 + 26^2 + 26^3 + 26^4 + 26^5$. **611.** а) 24; б) 120; в) 144; г) 2880; д) $5 \cdot 4! = 5! = 120$. **612.** а) 8!; б) 7!; в) 10!. **613.** $3! = 6$. **614.** 6!; 8!. **615.** а) $5! = 120$; б) $\frac{5!}{5} = 4! = 24$. **616.** а) $4! = 24$; б) $5! - 4! = 96$. **618.** а) $\frac{9!}{2}$ (так как две буквы «а»); б) 12! : 2 : 2 (по две «е», «а»); в) 13! : 2 : 2 : 2 : 2 (по две «к», «о», «и», «а»). **619.** $7! \cdot 4!$. **620.** $5! \cdot 5!$. **621.** а) Верно; б) неверно; в) верно. **622.** а) Делится на 47, на 99, на 102 ($102 = 4 \cdot 23$); б) 24 нулями. **623.** а) В зависимости от того, какие рассадки считать разными, будут получены ответы: 8!; 7!; 7! : 2; б) если все фигуры на карусели разные, то 10!; если все кресла одинаковые, то 9!. **624.** 11!. **625.** 19! : 2. **629.** а) $\frac{4}{9}$; б) 27; в) −0,002; г) −0,5. **630.** а) 2^{2n+4}; б) 2^{3n+3}; в) 5^{2n+15}; г) 9^{4n+4}. **631.** б) $-x^3$; г) $-x^3$. **632.** а) $25c$; б) $6a^2$; в) $\frac{y}{2}$; г) $\frac{p^3}{27}$. **635.** Да. **636.** $3 \cdot 4! = 72$. **637.** $9 \cdot 9 \cdot 10^6$. **638.** 6!; $4 \cdot 5!$ четных, $2 \cdot 5!$ нечетных. **639.** а) 5!; б) 4!; в) 5!; г) $2 \cdot 5!$. **640.** $3! \cdot 3! \cdot 2$. **641.** 4^{10}; 3^n; m^n. **642.** а) 6^5; б) 5^5; в) $6^5 - 5^5$. **643.** $9000 - 5^4$. **644.** $9\,000\,000\,000 - 9 \cdot 9!$.

Тест к главе 6. **1.** В. **2.** a^{n+2}. **3.** Б. **4.** А. **5.** 1) — в); 2) — г); 3) — б); 4) — д). **6.** 156 625. **7.** $\frac{1}{9}$. **8.** Г. **9.** Б. **10.** А. **11.** А. **12.** В. **13.** $\frac{1}{49}$. **14.** Б. **15.** В. **16.** Г. **17.** А. **18.** В. **19.** Г. **20.** Б.

ГЛАВА 7

651. б) $-1{,}25$. **653.** в) 54; г) 4850. **659.** б) 42 925. **660.** б) 1 625 625. **684.** $t-s=31$, $s-t=-31$. **685.** $a-c=x+y$, $c-a=-x-y$. **688.** в) $222a+222b+222c$. **705.** б) $9m$; в) a^3+3a^2+12a. **713.** а) y^3+y^2-3y+1; в) a^3+b^3. **714.** а) $-2x^2-3x+13$; б) $m^2-5mn+n^2$; в) $4z+6$; г) $4c^2+50$; д) $u^2+u+v-1$. **715.** а) $5n^2-3n-4$; б) $-4x^2-6xy+4y^2$; в) $12a+10$; г) $13c^2-17cd+3d^2$. **717.** а) x^4-2x^2+1; в) y^4-13y^2+4. **718.** а) $x^3-9x^2+23x-15$; б) $2x$; в) y^5-1; г) n^5+1. **721.** а) $7x^2-21x+11$; б) $-10n^2+70n-30$. **733.** в) $k=8$ или $k=-8$; г) $k=10$ или $k=-10$. **742.** в) $10x^2-23x+11$; г) $2a^2-6a$. **744.** а) m^2+n+8; б) 25. **749.** а) $(2a-b)^2$; б) $(2x+2y)^2$. **754.** а) 4,25; б) 6. **757.** б) 2; в) $\frac{3}{14}$; г) 0. **758.** б) 0,6; в) -2. **759.** а) 4; б) 3,5; в) 9; г) 3,5. **762.** а) 180 км от A и 120 км от B; б) 0,9 км. **764.** а) $\frac{3}{4}$ ч, 3 км; б) 60 км/ч, 480 км. **766.** а) 3 ч, 60 км; б) 90 м/мин. **767.** б) 225 см^2. **768.** а) 24×24 см, 32×18 см; б) 8100 м^2. **769.** а) 80 страниц; б) 10 дней и 6 дней, 480 страниц. **770.** а) Через 8 дней; б) 4 года и 8 лет. **771.** а) 3; б) $5\frac{2}{3}$; в) $-1{,}5$; г) 0,1; д) $\frac{5}{11}$; е) $\frac{7}{8}$. **772.** а) 2; б) $-7\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{5}$; г) $-\frac{1}{2}$. **773.** 70 км/ч. **774.** 1,9 ч, 2,3 ч. **775.** $\frac{1}{3}$ ч, $1\frac{2}{3}$ ч. **777.** 2 ч. **778.** 30 км/ч. **779.** 5 км/ч, 15 км/ч. **780.** 20 км. **781.** 2 км. **783.** 19×35 см. **784.** 1200 л. **788.** а) 9; б) 5. **793.** Числа вида $6k+1$ и $6k+5$, где $k=0, 1, 2, \ldots$. **795.** а) Числа вида $10k+9$, где $k=0, 1, 2, \ldots$; б) числа вида $10k+8$, где $k=0, 1, 2, \ldots$. **797.** а) $-1{,}51$, $-0{,}96$; б) $-1{,}3$, $-0{,}8$. **799.** а) $4\frac{1}{2}$, $4\frac{2}{9}$; б) 3,2, $-8{,}5$. **800.** в) $19b^3c^3$; г) m^6+n^6; д) x^6+y^6; е) $9y^4z^2+9y^2z^4$. **804.** 3 ч, 105 км. **805.** $3\frac{1}{3}$ мин. **807.** 9 и 12 деталей. **809.** 40 и 60 пакетов в час. **810.** 30 страниц. **811.** 19×25 см. **812.** 90×210 см. **815.** 30 учеников.

Тест к главе 7. **1.** $-\frac{1}{8}$. **2.** В. **3.** В. **4.** А. **5.** В. **6.** Б. **7.** А. **8.** $2x^3-x^2-1$. **9.** Г. **10.** $10a$. **11.** В. **12.** А. **13.** В. **14.** Г. **15.** А. **16.** Г. **17.** Г. **18.** Б. **19.** Б. **20.** Б.

ГЛАВА 8

819. а) 5800; б) 0. **822.** а) 2; б) $-0{,}1$; в) 90; г) 2,6. **829.** д) $\frac{2c}{3a}$; е) $\frac{n}{a}$; ж) $\frac{x}{x+y}$; з) $\frac{a-b}{3}$. **832.** а) -4; б) $-\frac{1}{9}$. **836.** а) $(x-y)(2+x-y)$; в) $(x-y)^3$; д) $m(m-n)^2$. **838.** а) $\frac{4}{3}$; б) $-\frac{4}{3}$; в) $\frac{1}{4}$. **848.** в) $(3a-b)(b-a)$; г) $(2y-1)(3y+a)$; ж) $(4x+1)(2x^2+1)$; з) $(5c-1)(a^3+b)$. **849.** а) 162; б) 100; в) 0; г) 0. **850.** в) $(a-b-1)(x+y)$; д) $(a-b)(a^4+a^2b^2+b^4)$; е) $(x+qy+pq)(px+q)$. **852.** а) $(a+b)(a+4)$; б) $(c-b)(c-3b)$; в) $(b+2)(b+3)$;

г) $(c-3)(c-4)$. **860.** а) $\frac{1}{a-b}$; в) $\frac{a+1}{b}$; д) $\frac{x-y}{x+y}$. **865.** в) $4b^2-3c^2$; г) $1-10k^2$. **866.** а) $2a^2-2a-1$; б) x^2+4x-y^2; в) $14c^2+5c-b^2$; г) 5; д) $2ab-2b^2$; е) $4a+2$. **867.** а) a^3-a; б) $-2x^2+8$; в) $2bc^2-2b^3$; г) $3ab^2-3a$. **868.** а) 0,6; б) 21; д) 0,4; е) 9. **870.** а) $(a+b)(1+a-b)$; г) $(x-2)(x+1)$; д) $2(1-y)$. **873.** а) $-a-9$; б) $-6x-20$; в) $2x^2-11$. **874.** а) x^4-y^4; б) a^4-1; в) $1-a^8$; г) $x^{16}-1$. **875.** д) $a^2+2ab+b^2-c^2$; е) $x^2-y^2+2yz-z^2$; ж) a^4-4a^2+4a-1; з) x^4+4. **882.** а) $2a^3$; б) 16; в) $27-y$; г) $17x$. **884.** а) $4y(x^2+y^2)$; б) $-8a^2b$; в) $12(n^2+9)$; г) $-4m^2$. **888.** а) a^6-b^6; б) $x^{12}-1$; в) x^6-y^6; г) $a^6+2a^3b^3+b^6$. **889.** ж) $3a(n-3)(n+3)$; и) $x(x-3)(x+3)$; м) $10b(2-b)(2+b)$. **892.** б) $x^2(x-1)(x+1)$; в) $(n-2)(n+2)(n^2+4)$; д) $(1-c)(1+c)(1+c^2)$. **893.** а) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$; г) $(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)$. **894.** а) $y(x+y)^2$; в) $-a(3y+1)^2$. **897.** а) $(a+b)(a-b)^2$; б) $-(x+y)(x-y)^2$; в) $(a+n)(n-1)(n^2+n+1)$; г) $(a-b)^3$. **898.** а) $(x+y)(a-x-y)$; в) $(a-b+c)(a+b-c)$; д) $m(a-m-1)(a+m+1)$. **899.** а) $(x-3)(x+5)^2$; в) $(a-5)(a+5)(a-1)^2$. **900.** а) $(a-x)(x-y)(y-a)$; б) $(a-x)(x-y)(y-a)\times$ $\times(a+x+y)$. **904.** 2) $(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)...(x^{2^9}+y^{2^9})$. **908.** а) 2; -2; г) 5; -5. **909.** а) 0; 1; -1; г) 0; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$. **910.** а) 0,5; б) 5. **912.** а) 7; б) $\frac{1}{3}$; в) 1; -4; г) -4; -2. **913.** а) 1; $-0,25$; г) 3; -1. **917.** а) m; $-m$; в) $a-4$; $-a-4$. **918.** а) $(a-1)(a^2-4a+5)$; б) Прибавьте и вычтите $4y^4$. **919.** а) $(n^2-n+1)\times$ $\times(n^2+n+1)$; б) $(n^4-n^2+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1)$. **920.** 1; -1. **924.** а) $3\cdot 2^n$; б) $-24\cdot 5^{n-1}$; в) $3^n(3^n-1)$; г) $7(7^n+7^{n-1}+1)$. **929.** а) $(x+y+z)(xy+xz+yz)$; б) $(a+b+c+1)(ab+bc+ac)$. **931.** а) $(a^n-1)(a^n+1)$; б) $(2-x^n)(2+x^n)$. **936.** а) $2(x-y)(x+y)(x-3)$; в) $36(x-2)(x+2)(x-1)$. **937.** а) $\frac{1}{a+1}$; б) $\frac{x+y-z}{x-y+z}$. **938.** а) $(x-z)(y-z)(x-y)$; б) $(z-x)(y-x)(y-z)$. **939.** а) 2; $-1,5$; б) $-0,5$; -1; в) 3; $-2,5$; г) 1. **941.** а) 30; -30; б) 12; -12. **942.** а) 0; 2; б) 0; -6; в) $\frac{1}{3}$; г) -2; 2; 4.

Тест к главе 8. 1. Г. **2.** В. **3.** $\frac{x-2}{x}$. **4.** В. **5.** А. **6.** Б. **7.** $(x-3)(xy-z)$. **8.** А. **9.** $(0,5xy-z)(0,5xy+z)$. **10.** Б. **11.** А. **12.** В. **14.** $(y-3)(y+3)(y^2+9)$. **15.** Г. **16.** В. **17.** В. **18.** 0; 3; -3.

ГЛАВА 9

944. $\frac{67}{92}=0,73$; $\frac{25}{92}=0,27$. **949.** а) 1430; б) 1330. **950.** 180. **951.** 600. **953.** 0,997. **957.** Нельзя. **958.** Нельзя. **963.** 1500. **964.** Монета или кубик. **967.** б) Событие A – 48%; событие B – 52%; событие C – 54%. **968.** Нельзя. **971.** а) 1; б) 1. **972.** 901 билет.

Тест к главе 9. 1. В. **2.** Б. **3.** 84,2%. **4.** Г. **5.** Г. **6.** В. **7.** В.

Оглавление

Учебное издание

Серия «Академический школьный учебник»

Дорофеев Георгий Владимирович
Суворова Светлана Борисовна
Бунимович Евгений Абрамович
Кузнецова Людмила Викторовна
Минаева Светлана Станиславовна

АЛГЕБРА

7 класс

Учебник для общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т.А. Бурмистрова*. Редактор *Л.В. Кузнецова*. Младший редактор *Н.В. Ноговицина*. Художник *О.П. Богомолова*. Художественный редактор *О.П. Богомолова*. Компьютерная графика *В.В.Брагин*. Техническое редактирование и компьютерная верстка *И.Ю. Соколова*. Корректоры *О.Н. Леонова, Н.А. Смирнова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 29.09.09. Формат $70\times90^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 13,68 + 0,46 форз. Тираж 20 000 экз. Заказ № 5091.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.
ОАО «Тверской ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР». 170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46.